U.S.T.H.B. **Faculté de Physique** **2ème Année SETI** **Physique 1** **Année 2005-2006**

2ème Epreuve de Moyenne Durée (1 h 30 mn)

EXERCICE I (/ 08 points) :

Dans le système oscillant représenté sur la Figure 1 le cylindre est homogène, de masse M et de rayon R. Ce cylindre est relié au point A par un ressort de coefficient de raideur K à un bâti B_1 animé d'un mouvement sinusoïdal d'amplitude S_0 et de pulsation ω. Il est également relié par un amortisseur de coefficient α à un bâti fixe B_2. Le cylindre roule sans glisser sur un plan horizontal. La tige est sans masse et de longueur l. L'une de ses extrémités peut osciller sans frottements autour de l'axe du cylindre. Elle porte à l'autre extrémité une masse ponctuelle m qui est reliée à un bâti fixe B_3 par un ressort de coefficient de raideur k. A l'équilibre la tige est verticale et l'axe du cylindre G est à l'origine des coordonnées O ; on suppose aussi que les ressorts ne sont pas déformés. La rotation de la tige par rapport à la verticale est repérée par l'angle φ et celle du cylindre par l'angle θ. On considère les oscillations de faibles amplitudes.

On pose : $3M = 2m$; $4K = k = \dfrac{mg}{l}$; $x_2 = l\varphi$ et $x_1 = R\theta$.

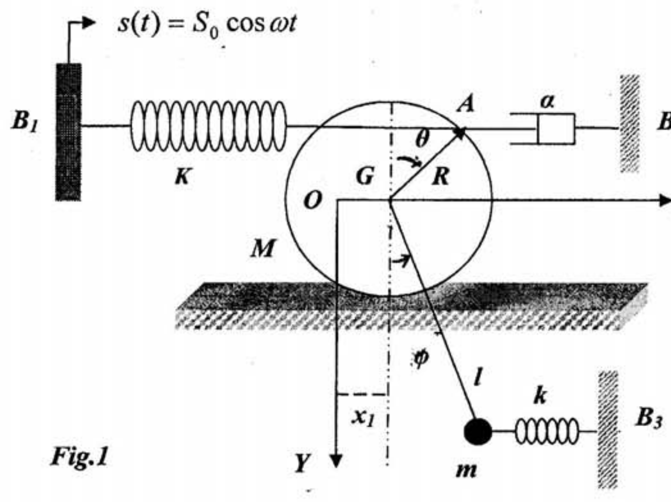


Fig.1

1°) Montrer que le lagrangien du système peut s'écrire sous la forme :

$$L = m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - kx_1^2 - kx_1x_2 - kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1 s - \frac{1}{8}ks^2$$

2°) Déterminer les équations différentielles en $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Montrer que le système est équivalent à un système forcé soumis à une force $F(t)$ sinusoïdale dont on précisera l'amplitude F_0.

3°) Exprimer ces équations de mouvement en fonction des vitesses $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$.

4°) a) Déterminer $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$ pour la pulsation $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$.
En déduire le comportement du système à cette pulsation.

b) Déterminer l'impédance d'entrée du système, définie par $Z_e / \dot{x}_1$, à cette pulsation.

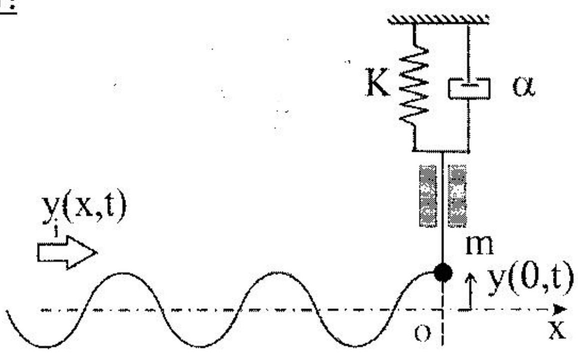
5°) a) Déterminer $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$ pour la pulsation $\omega = \omega_1 = \sqrt{2k/m}$.
En déduire le comportement du système à cette pulsation.

b) Déterminer l'impédance d'entrée du système $Z_e / \dot{x}_1$ à cette pulsation.

$Z_e = F(t)/\dot{x}_1(t)$

EXERCICE II (/12 points) :

Fig.2



On considère une corde, supposée semi-infinie, de masse linéique μ, soumise à une tension T et terminée en $x = 0$ par le système (masse m – ressort de constante de raideur K – amortisseur de coefficient de viscosité α) de la Figure 2. Des guides parfaitement rigides n'autorisent que les mouvements verticaux de masse m. On fait propager dans la corde, à partir de $-\infty$, une onde sinusoïdale d'amplitude y_0 et de pulsation ω. On considère les oscillations de faible amplitude de la corde et on néglige son poids par rapport au reste des forces. A l'équilibre la corde est horizontale et la masse m se trouve en O.

1°) Quelle est l'expression du déplacement de particule de l'onde incidente $y_i(x,t)$?

2°) Rappeler les expressions de l'impédance caractéristique Z_c de la corde et de la vitesse de propagation V des ondes qui s'y propagent.

3°) En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la masse m, montrer que l'expression de l'impédance terminale de la corde est :

$$Z_T = \alpha + j(m\omega - K/\omega)$$

4°) Donner l'expression du coefficient de réflexion, R, pour le déplacement de particules à l'extrémité de la corde, en précisant son module $|R|$ et son argument θ.

5°) Montrer que le déplacement total de particule dans la corde s'écrit : $y(x,t) = A(x) \cdot y_i(x,t)$, en précisant l'expression de $A(x)$ en fonction de ω, k, x, $|R|$ et θ.

6°) Pour la pulsation $\omega = \sqrt{K/m}$ et lorsque la tension de la corde vérifie : $T < \alpha^2/\mu$,

a) Que deviennent $|R|$ et θ ?

b) Quelles sont les positions des minima et des maxima de vibration et les amplitudes de déplacement Y_{max} et Y_{min} correspondantes ?

c) On définit le taux d'ondes stationnaires dans la corde par le rapport : $\tau = Y_{max} / Y_{min}$. Exprimer τ en fonction de $|R|$ et θ.

d) Tracer la courbe donnant les variations de l'amplitude $Y(x)$ en fonction de x.

e) Que devient la nature de ces ondes si $T = \alpha^2/\mu$.

Année 2006

Corrigé de la 2$^{\text{ème}}$ EMD

Exercice I) /8points

1°)

$$T = T_C + T_m \quad \text{avec} \quad T_C = \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}\Im\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}M)\dot{x}_1^2 \quad \text{et} \quad T_m = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2$$

donc $T = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}M + m)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2)$ **(1pt)**

$$U = \frac{1}{2}K(2x_1 - s(t))^2 + \frac{1}{2}k(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}m\frac{g}{l}x_2^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha(4\dot{x}_1^2)$$ **(1pt+0.5pt)**

D'où le lagrangien :

$$L = m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - kx_1^2 - kx_1x_2 - kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1s - \frac{1}{8}ks^2.$$

2°) Equations différentielles en x_1 *et* x_2 :

$$2m\ddot{x}_1 + 4\alpha\dot{x}_1 + 2kx_1 + m\ddot{x}_2 + kx_2 = \frac{k}{2}s_0e^{j\omega t}$$

$$m\ddot{x}_2 + 2kx_2 + m\ddot{x}_1 + kx_1 = 0$$ **(1pt+1pt)**

Le système est soumis à une force $F(t) = \frac{k}{2}s_0e^{j\omega t}$ *d'amplitude* $F_0 = \frac{k}{2}s_0$ *et de pulsation* ω

(0.5pt)

3°) Equations en fonction des vitesses $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$:

$$\left\{4\alpha + 2j(m\omega - \frac{k}{\omega})\right\}\dot{x}_1 + j(m\omega - \frac{k}{\omega})\dot{x}_2 = \frac{k}{2}s_0e^{j\omega t}$$

$$j(m\omega - \frac{k}{\omega})\dot{x}_1 + j(m\omega - \frac{2k}{\omega})\dot{x}_2 = 0$$

(0.5pt+0.5pt)

4°) pour $\omega = \omega_0 = \frac{k}{m}$:

a) $\dot{x}_1 = \frac{1}{4\alpha} \times \frac{k}{2}s_0e^{j\omega t}$ *et* $\dot{x}_2 = 0$ **<u>à cette fréquence la tige reste verticale</u>** **(0.5pt)**

b) L'impédance d'entrée est $Z_e = \frac{F_0}{\dot{x}_{10}} = 4\alpha$ **(0.5pt)**

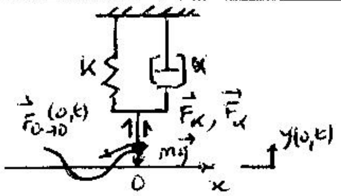
5°) pour $\omega = \omega_1 = \sqrt{2k/m}$:

a) $\dot{x}_1 = 0$ *et* $\dot{x}_2 = -\frac{j}{(m\omega_1 - \frac{k}{\omega_1})} \times \frac{k}{2}s_0e^{j\omega t}$ **le cylindre ne se déplace pas** **(0.5pt)**

b) l'impédance d'entrée $Z_e = \frac{F_0}{\dot{x}_{10}}$ *est infinie* **(0.5pt)**

EXERCICE II (/ 12 points) :

0,5pts — **1°)** $y_i(x,t)=y_0e^{j(\omega t-kx)}$ avec $k=\omega/V$.



1 pt — **2°)** $Z_c=\sqrt{\mu T}$ et $V=\sqrt{T/\mu}$.

2 pts — **3°)** $Fy_{G\to D}(0,t)-mg-K\left[y(0,t)-\Delta l_{eq}\right]-\alpha\dot{y}(0,t)=m\ddot{y}(0,t)$ et $-mg+K\Delta l_{eq}=0$

$\Rightarrow Fy_{G\to D}(0,t)=m\ddot{y}(0,t)+\alpha\dot{y}(0,t)+Ky(0,t)$. En régime sinusoïdal : $\ddot{y}=j\omega\dot{y}$ et $y=\dot{y}/j\omega$

$\Rightarrow Fy_{G\to D}(0,t)=m\ddot{y}+\alpha\dot{y}+Ky$; D'où : $Z_T=\dfrac{Fy_{G\to D}(0,t)}{\dot{y}(0,t)}=\alpha+j(m\omega-K/\omega)$

1 pt — **4°)** $R=\dfrac{\dot{y}_r(0,t)}{\dot{y}_i(0,t)}=\dfrac{Z_c-Z_T}{Z_c+Z_T}=\dfrac{(Z_c-\alpha)-j(m\omega-K/\omega)}{(Z_c+\alpha)+j(m\omega-K/\omega)}$; $R=|R|e^{j\theta}$ avec :

$$|R|=\left[\frac{(Z_c-\alpha)^2+(m\omega-K/\omega)^2}{(Z_c+\alpha)^2+(m\omega-K/\omega)^2}\right]^{1/2} \quad \text{et} \quad \theta=-arctg\left(\frac{m\omega-K/\omega}{Z_c-\alpha}\right)-arctg\left(\frac{m\omega-K/\omega}{Z_c+\alpha}\right).$$

2 pts — **5°)** $y_i(x,t)=y_0e^{j(\omega t-kx)}+y_{0r}e^{j(\omega t+kx)}$ et $R=y_{0r}/y_0$:

$\Rightarrow y(x,t)=A(x)\cdot y_i(x,t)$ avec : $A(x)=\left|1+|R|e^{j(2kx+\theta)}\right|$.

6°)

1 pt — **a)** $\omega=\sqrt{K/m} \Rightarrow Z_T=\alpha$ et $R=\dfrac{(Z_c-\alpha)}{(Z_c+\alpha)}$ réel

$T<\alpha^2/\mu \Rightarrow \sqrt{\mu T}<\alpha \Rightarrow R<0$ soit : $|R|=\dfrac{(\alpha-Z_c)}{(Z_c+\alpha)}$ et $\theta=\pi$

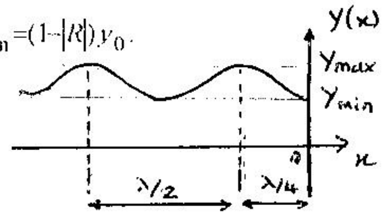
2 pts — **b)** $A(x)=\left|1-|R|e^{2jkx}\right|$

maxima : $e^{2jkx}=-1 \Rightarrow x=(2n+1)\lambda/4<0$ et $Y_{max}=(1+|R|)y_0$

minima : $e^{2jkx}=+1 \Rightarrow x=n\lambda/2\le 0$ et $Y_{min}=(1-|R|)y_0$.

1 pt — **c)** $\tau=Y_{max}/Y_{min}=(1+|R|)/(1-|R|)$.

0,5pts — **d)** Courbe $Y(x)$:



1 pt — **e)** $T=\alpha^2/\mu \Rightarrow \sqrt{\mu T}=\alpha \Rightarrow R=0$ d'où : $y_r(x,t)=0$; la corde est le siège d'une onde progressive uniquement.