UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

INSTITUT DE PHYSIQUE

DEPARTEMENT DES ENSEIGNEMENTS DE PHYSIQUE DE BASE

DEUXIEME ANNEE
TRONC COMMUN TECHNOLOGIE

TRAVAUX DIRIGES DE PHYSIQUE

VIBRATIONS – ONDES

A.C. CHAMI, H. DJELOUAH, S. KESSAL

Edition 1998-1999

SOMMAIRE

RAPPELS DE MATHEMATIQUES

TRIGONOMETRIE :

Exercice 1 : Un déplacement harmonique est décrit par $x(t)=10\cos(\pi t/5)$ (x en mm, t en secondes et la phase en radians). Déterminer :
(a) la fréquence et la période du mouvement;
(b) l'amplitude du déplacement, de la vitesse et de l'accélération;
(c) le déplacement, la vitesse et l'accélération aux instants t=0s et t=1.2s.

Exercice 2 : Un accéléromètre indique que l'accélération d'un dispositif mécanique est sinusoïdale de fréquence 40Hz. Si l'amplitude de l'accélération est de 100 m/s^2 , déterminer l'amplitude du déplacement et de la vitesse.

Exercice 3 : Un mouvement harmonique est décrit par $x(t)=X\cos(100t+\varphi)$. Les conditions initiales sont $x(0)=4.0$mm et $\dot{x}(0)=1.0$m/s.
a) Calculer X et φ.
b) Exprimer x(t) sous la forme $x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ et en déduire les valeurs de A et B.

Exercice 4 : Montrer que $x(t) = 2\sin(\omega t) + 3\cos(\omega t)$ peut se mettre sous la forme :
$x(t) = X\cos(\omega t+\alpha)$. Quelles sont les valeurs de X et α?

Exercice 5 : Représenter graphiquement les variations au cours du temps d'un mouvement périodique décrit par:
a) $x(t) = 3\sin(2\pi t) + 3\sin(20\pi t)$;
b) $x(t) = 3\sin(2\pi t) + 3\sin(2.2\pi t)$.

DEVELOPPEMENT EN SERIES DE FOURIER

Exercice 6 : 1) Représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes dont la période est égale à T. Préciser la parité de chacune de ces fonctions :

a) $f(t) = t$ pour $-T/2 \le t \le T/2$

b) $\begin{cases} f(t) = -t & \text{pour} \quad -T/2 \le t \le 0 \\ f(t) = t & \text{pour} \quad 0 \le t \le T/2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} f(t) = -a & \text{pour} \quad -T/2 \le t \le 0 \\ f(t) = a & \text{pour} \quad 0 \le t \le T/2 \end{cases}$

d) $f(t) = t^2$ pour $-T/2 \le t \le T/2$

e) $\begin{cases} f(t) = 0 & \text{pour} \quad -T/2 \le t \le 0 \\ f(t) = t & \text{pour} \quad 0 \le t \le T/2 \end{cases}$

2) Calculer les coefficients du développement en série de Fourier de chacune de ces fonctions.

3) Quelle est la valeur moyenne sur une période de chacune de ces fonctions?

NOMBRES COMPLEXES :

Exercice 7 : Exprimer les nombres complexes suivants sous la forme $Z = |Z|\, e^{j\phi}$:

a) $1 - j\sqrt{3}$ b) -2 c) $\frac{3}{\sqrt{3} - j}$ d) 5j

e) $\frac{3}{\left[\sqrt{3} - j\right]^2}$ f) $\left(\sqrt{3}+j\right)\left(3+4j\right)$ g) $\frac{\sqrt{3} - j}{3 - 4j}$ h) $(2j)^2+3j+8$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES :

Exercice 8 : Calculer et représenter graphiquement la solution de l'équation différentielle homogène : $\ddot{x} + 4x = 0$, pour les conditions initiales suivantes : a) x(0) = 1 et $\dot{x}(0) = 0$.
b) x(0) = 0 et $\dot{x}(0) = 2$.

Exercice 9 : Pour les conditions initiales suivantes :

a) x(0) = 1 et $\dot{x}(0) = 0$. **b)** x(0) = 0 et $\dot{x}(0) = 2$. **c)** x(0) = 1 et $\dot{x}(0) = 2$

calculer et représenter graphiquement les solutions des équations différentielles homogènes suivantes:

1. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0$
2. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$
3. $\ddot{x} + 0.3\dot{x} + 4x = 0$

Exercice 10 : Pour les conditions initiales x(0) = 0 et $\dot{x}(0) = 0$, calculer et représenter graphiquement la solution générale de chacune des équations différentielles inhomogènes suivantes :

1. $\ddot{x} + 4x = 5$
2. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 5$
3. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 5$
4. $\ddot{x} + 0.3\dot{x} + 4x = 5$
5. $\ddot{x} + 4x = 5\cos(3t)$
6. $\ddot{x} + 4x = 5\cos(2t)$
7. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 5\cos(3t)$
8. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 5\cos(3t)$
9. $\ddot{x} + 0.3\dot{x} + 4x = 5\cos(3t)$

Exercice 11 : Calculer la solution particulière de chacune des équations différentielles inhomogènes suivantes :

1. $\ddot{x} + 4x = f(t)$
2. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = f(t)$
3. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = f(t)$

où f(t) est une fonction. de période T, définie par : $\begin{cases} f(t) = -a \quad pour - T/2 \le t \le 0 \\ f(t) = a \quad pour\ 0 \le t \le T/2 \end{cases}$

DYNAMIQUE DU SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE

Exercice 1 :

Trouver le moment d'inertie, par rapport à son axe de révolution, d'un cylindre droit, plein et homogène, de rayon R, de hauteur h et de masse M.

Exercice 2 :

Utiliser le théorème d'Huyghens pour trouver le moment d'inertie d'un cylindre par rapport à l'une de ses génératrices.

Exercice 3 :

Soit une barre homogène de faible section, de longueur L et de masse M.

1) Calculer son moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire passant par son milieu.
2) Calculer son moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire passant par une de ses extrêmités.

Exercice 4 :

Une barre homogène de faible section, de masse M et de longueur L, tourne sans frottement dans un plan vertical autour d'un axe horizontal fixé à l'une de ses extrêmités.

1) Calculer son énergie mécanique.
2) En déduire l'équation différentielle qui régit son mouvement.

Exercice 5 :

Un cylindre roule sans glisser sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale.

1) Calculer son énergie mécanique.
2) En déduire son accélération.

Exercice 6 :

Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement d'une bille de rayon r qui roule sans glisser dans une demi sphère de rayon R. On se limitera à l'étude du cas particulier du mouvement dans un plan vertical.

EQUATIONS DE LAGRANGE

DEGRES DE LIBERTE ET COORDONNEES GENERALISEES

Exercice 1 : On considère un point matériel astreint à se déplacer sur un cercle de rayon R et de centre 0 contenu dans le plan xOy.
1) Traduire la liaison par une ou des relations mathématiques; quel est le nombre de degrés de liberté de ce point?
2) Quelles sont les coordonnées généralisées que l'on peut utiliser pour repérer ce point?

Exercice 2 : On considère un point matériel astreint à se déplacer sur une sphère. Répondre aux mêmes questions que l'exercice précédent.

Exercice 3 : Pour repérer la position d'un solide dans l'espace, il faut repérer la position de trois points non alignés A, B et C de ce solide.
1) Traduire les liaisons physiques par des relations mathématiques; quel est le nombre de degrés de liberté de ce solide?
2) Quelles sont les coordonnées généralisées les plus couramment utilisées pour décrire le mouvement d'un solide?
3) Quel est le nombre de degrés de liberté pour un solide qui possède : a) un point fixe? b) deux points fixes?

Exercice 4 : On considère une haltère constituée de deux masses identiques m, supposées ponctuelles, reliées par une tige de longueur a, de diamètre et de masse négligeables.
1) Comment s'écrit mathématiquement la liaison entre les deux masses?
2) Quel est le nombre de degrés de liberté de ce système?

EQUATIONS DE LAGRANGE POUR LES SYSTEMES CONSERVATIFS

Exercice 5 : On considère une masse M qui glisse sans frottement selon une droite sur un plan horizontal. Elle est reliée à un bâti fixe par un ressort parfait de raideur k, colinéaire avec la trajectoire.
1) Quel est le nombre de degrés de liberté ?
2) Quelles sont les forces qui s'exercent sur la masse M. Quelles sont celles qui dérivent d'un potentiel ? Quelles sont celles qui ne travaillent pas ?
3) Calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de ce système; en déduire l'équation différentielle du mouvement par la méthode des équations de Lagrange.
4) Etablir l'équation différentielle du mouvement en utilisant la seconde loi de Newton; que remarque-t-on ? Quelles sont les forces qui n'interviennent pas dans l'équation de Lagrange et qui sont prises en compte dans les équations de Newton ? Quelle est leur particularité ?

Exercice 6 : On considère un pendule simple constitué d'une masse m reliée à un point fixe O par un fil de longueur l et de masse négligeable. Cette masse peut osciller librement dans le plan vertical xOy.

1) Quel est le nombre de degrés de liberté de ce système? Quelles sont les coordonnées généralisées les plus pratiques à utiliser? Ecrire les coordonnées x et y de la masse m dans le repère xOy en fonction des coordonnées généralisées choisies.
2) Quelles sont les forces qui s'exercent sur la masse m. Quelles sont celles qui dérivent d'un potentiel? Quelles sont celles dont le travail n'est pas nul au cours du mouvement?
3) Etablir les équations du mouvement par la méthode des équations de Lagrange.
4) Ecrire les équations du mouvement par la méthode de Newton; retrouve-t-on le même résultat que par la méthode de Lagrange? Déterminer le module de l'action du fil sur la masse m; pouvait-on déterminer ce module par la méthode de Lagrange? Commenter le résultat.

Exercice 7 : Etudier le mouvement d'un cylindre de masse M et de rayon R, qui roule sans glisser le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné qui fait un angle θ avec l'horizontale.

EQUATIONS DE LAGRANGE POUR LES SYSTEMES NON CONSERVATIFS

Exercice 8 : Etudier à l'aide des équations de Lagrange, le mouvement d'une masse M qui glisse sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale, avec un coefficient de frottement de glissement μ. La masse est soumise de plus à une force F(t) parallèle au plan incliné.

Exercice 9 : Etudier, à l'aide des équations de Lagrange, le mouvement d'un cylindre de masse M et de rayon R autour de son axe de révolution fixé horizontalement, entraîné en rotation par l'action de forces extérieures dont le moment par rapport à l'axe de rotation est M(t).

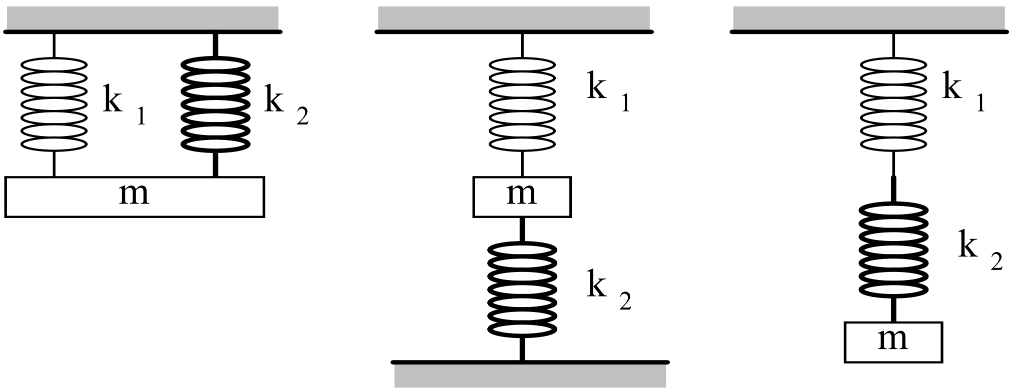
Exercice 10 : Une particule de masse m est lâchée sans vitesse initiale dans un fluide caractérisé par un coefficient de frottement visqueux α. Etudier son mouvement à l'aide des équations de Lagrange.

Exercice 11 : Etablir l'équation différentielle du mouvement, dans un plan vertical, d'une masse ponctuelle m reliée à un point O par une tige de longueur R et de masse négligeable. La masse est soumise à une force F(t) qui reste perpendiculaire à la tige lors du mouvement. Les forces de frottement de viscosité peuvent être ramenées à une force $\vec{f}(t) = -\alpha\,\vec{v}$ appliquée à la masse m dont la vitesse instantanée est $\vec{v}$. Le coefficient de frottement visqueux α est supposé constant.

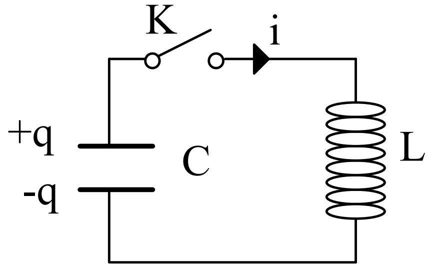
OSCILLATIONS LIBRES DE SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE

Exercice1: Association de ressorts

Calculer la fréquence des oscillations pour chacun des systèmes suivants:



Exercice 2 : Oscillateur électrique



Un circuit électrique est constitué d'une self L (de résistance supposée négligeable) et d'un condensateur de capacité C. La capacité possède une charge Q. A l'instant initial., l'interrupteur K est fermé puis le système oscille librement (voir figure).

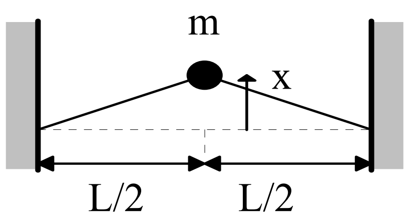
1) Ecrire l'équation qui régit les variations de la charge q du condensateur au cours du temps.

2) Résoudre cette équation et déterminer la période de cet oscillateur. Effectuer l'application numérique pour L=0.5H, C=0.5µF.et Q=0.5µC.

3) Calculer l'énergie du condensateur, celle de la self et l'énergie totale du circuit. Que remarque-t-on ?

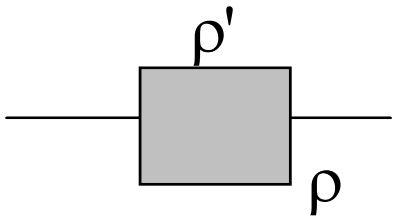
4) Faire l'analogie avec une masse m accrochée à un ressort .

Exercice 3: Corde plombée



Une masse ponctuelle m glisse sans frottement sur une table horizontale. Elle est fixée à deux bâtis fixes par deux cordes de masse négligeable tendues horizontalement. En supposant que la tension T des cordes reste constante lors du mouvement, calculer la période des oscillations pour de faibles amplitudes du mouvement dans la direction x.

Exercice 4 : Oscillations d'un iceberg



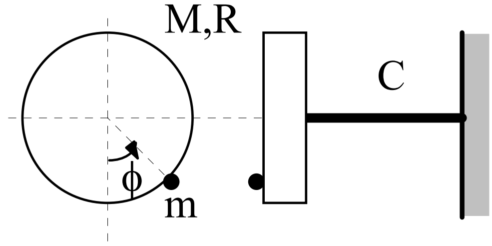
Un iceberg de masse volumique ρ', assimilable à un parallélépipède régulier et homogène de masse M flotte sur de l'eau de masse volumique constante ρ. Sa surface de base est S et sa hauteur est L.

On rappelle que la poussée d'Archimède qui s'exerce sur un objet immergé est: $\vec{P}_A = -\rho V\vec{g}$

où V est le volume immergé et g l'accélération de la pesanteur.
1) Calculer, à l'équilibre, le volume immergé de l'iceberg en fonction de son volume total. La masse volumique de la glace est ρ'=900 kg/m^3 ; celle de l'eau est ρ = 1000kg/m^3.
2) L'iceberg est écarté d'une distance verticale h par rapport à sa position d'équilibre. Calculer la période de ses oscillations quand les frottements sont considérés comme négligeables. Faire l'application numérique pour L=150m, h=2m, g=9.8m/s^2 .

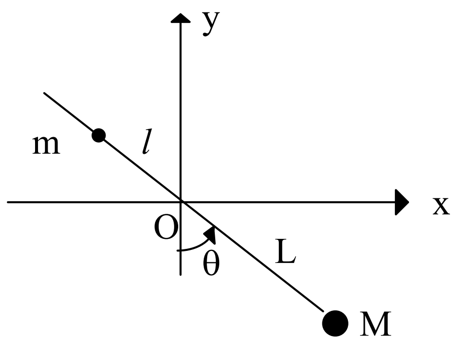
Exercice 5 : Pendule de torsion

Une tige d'acier de constante de torsion C est soudée par son extrémité au centre d'un disque homogène de masse M et de rayon R. L'autre extrémité est encastrée dans un bâti fixe. Une masse m est soudée au point le plus bas du disque. On tourne le disque d'un angle ϕ_0 et on le lâche sans vitesse initiale. Déterminer l'expression en fonction du temps de l'angle $\phi(t)$ d'écart du système par rapport à sa position d'équilibre. On néglige la flexion de la tige d'acier.



Exercice 6 : Métronome

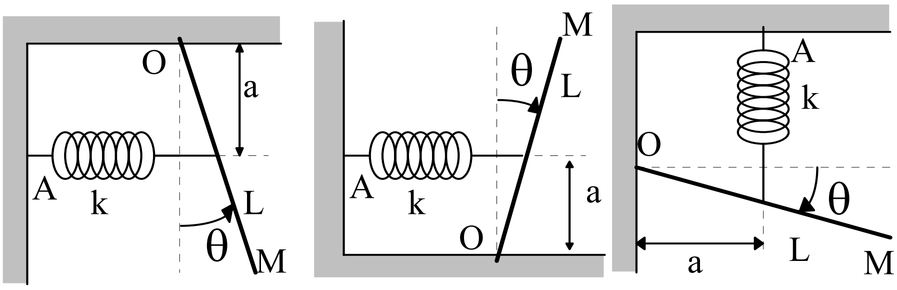
Un métronome est schématisé sur la figure ci-contre. La masse M est soudée à l'extrémité de la tige. La position de la masse m sur la tige peut être réglée. La tige est supposée de masse négligeable; elle est mobile sans frottements autour de O. La masse M étant en bas, on l'écarte d'un angle θ_0 petit et on l'abandonne sans vitesse initiale.



1) Quelle(s) condition(s) doit satisfaire le système pour qu'il puisse osciller ?
2) Déterminer l'expression de la période pour des oscillations de faibles amplitudes.
3) A.N.: Sachant que M= 80g, m = 20g et L=4cm, déterminer la distance *l* pour que la période du métronome soit égale à 2 s.
4) On veut augmenter la période d'oscillation du métronome. Faut-il rapprocher ou éloigner la masse m du point O ?

Exercice 7 :

Dans les figures ci-dessous, une tige homogène de masse M et de longueur L oscille sans frottement, dans un plan vertical, autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan du mouvement en O.



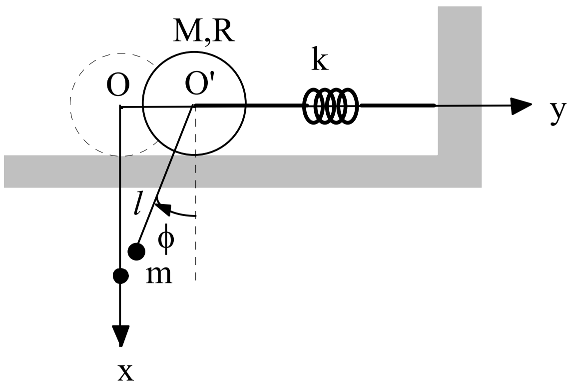
(a) (b) (c)

1) Quelle est la déformation du ressort à l'équilibre, sachant qu'à cette position θ=0?
2) Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des mouvements de faibles amplitudes.
3) A quelle condition le système de la figure (b) peut-il osciller? Quelle est la nature du mouvement lorsque cette condition n'est pas satisfaite?
4) Expliquer pourquoi la période des oscillations est indépendante de g dans le cas de la figure (c).
5) Calculer l'effort appliqué sur le mur au point A.

Exercice 8 :

On considère le dispositif schématisé sur la figure ci-contre. Un disque homogène de masse M et de rayon R est attaché par son axe à l'extrémité d'un ressort de raideur k. Une tige rigide, de longueur l, de masse négligeable, est solidaire du disque qui peut rouler sans glisser sur un plan horizontal.

Déterminer la pulsation propre du système. Sachant qu'à t=0, la tige est écartée d'un angle petit ϕ_0 par rapport à la verticale et lâchée sans vitesse initiale, déterminer l'expression de $\phi(t)$. Donner l'expression de la vitesse de la masse m quand la tige passe par la verticale.

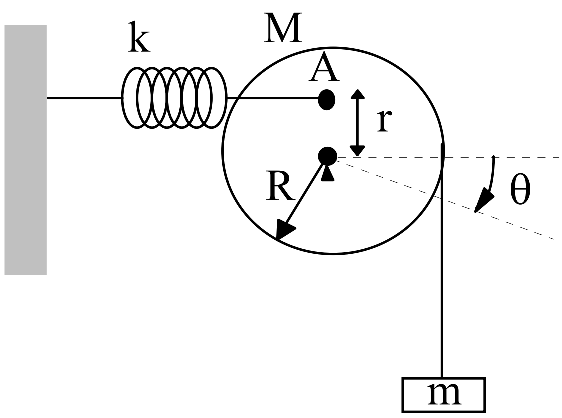


Exercice 9:

Dans le système ci-contre, la corde roule sans glisser autour du cylindre de masse M=5kg et de rayon R=40cm, qui tourne autour de son axe fixe. Elle porte à son extrémité une masse m=1kg. Un ressort de raideur k = 600 N/m, fixé à un bâti fixe, est accroché au point A distant de r=20cm de l'axe du cylindre.

1) Sachant qu'à l'équilibre θ = 0 et dans l'hypothèse des oscillations de faible amplitude, établir l'équation différentielle du mouvement. Donner l'expression de θ en fonction du temps pour les conditions initiales suivantes :

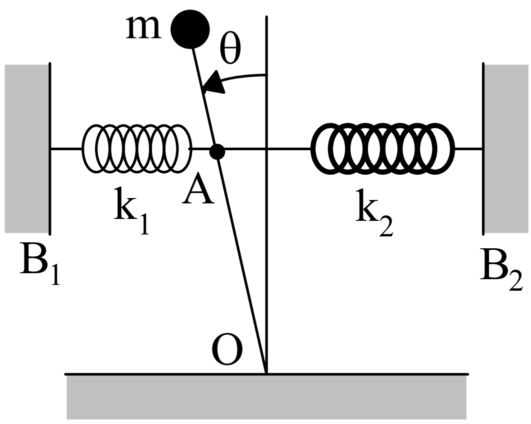
$\theta(t=0) = 5°$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$.



2) Au bout de cinq périodes d'oscillation, la masse m se décroche; quelle est la nature du mouvement à partir de cet instant? Autour de quelle position se font les oscillations? Calculer la nouvelle période du mouvement et l'amplitude des oscillations.
3) Tracer le graphe représentant les variations de θ en fonction du temps pour $0<t<10$s.

Exercice 10 :

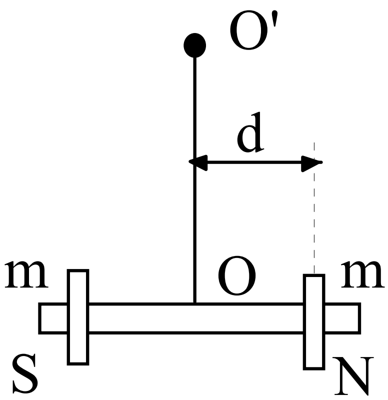
Soit une masse m fixée à l'extrémité d'une tige de masse négligeable et de longueur l. La tige effectue des oscillations de faibles amplitudes autour d'un axe fixe passant par le point O et perpendiculaire au plan du mouvement. Le point A de la tige, tel que OA=a, est relié à deux bâtis fixes B_1 et B_2 respectivement par deux ressorts de raideur k_1 et k_2. A l'équilibre, la tige est verticale.



a) Sachant qu'à l'équilibre, les ressorts ne sont pas déformés, établir l'équation différentielle du mouvement du système.
b) Si m, k_1 , k_2 et l sont donnés, quelle condition doit satisfaire la longueur a pour que le système puisse osciller?
c) Cette condition étant satisfaite, déterminer l'expression de la pulsation propre du système.

Exercice 11: Oscillations d'un moment magnétique :

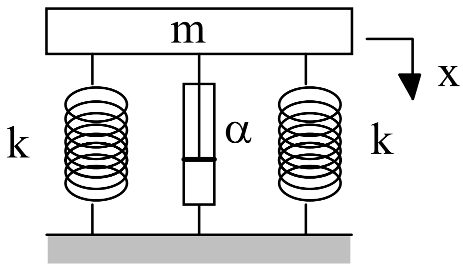
On veut mesurer la composante horizontale du champ magnétique terrestre B_0 à l'aide d'un pendule formé d'un aimant horizontal de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ et de masse M mobile dans le plan horizontal, autour d'un axe vertical OO'. L'aimant a la forme d'un parallélépipède rectangle de côtés L, l et h . On tourne ce barreau d'un angle θ_0 par rapport à sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale.



1) Sachant qu'aucun couple de torsion autre que magnétique n'agit sur le système, écrire l'équation du mouvement dans le cas où les frottements sont négligeables. En déduire la période d'oscillation du barreau dans le cas des faibles amplitudes. Retrouver l'équation du mouvement en utilisant la méthode de Lagrange.
2) Calculer B_0 si T= 8,2 s, $|\vec{\mathcal{M}}| = 2$ A.m^2 , L = 10 cm, l = h = 1 cm, M=80g.
3) Dans la pratique, on procède autrement afin d'éviter le calcul du moment d'inertie J du barreau. L'expérience précédente étant achevée, on la répète en plaçant sur le barreau deux masses cylindriques en cuivre, de masse m = 15 g, à des distances d = 4 cm de l'axe OO'. La nouvelle valeur de la période est alors T ' = 10,7 s. Calculer B_0 .
N.B. On rappelle qu'un aimant de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$,placé dans un champ magnétique $\vec{B}$, est soumis à un couple $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \times \vec{B}$.

OSCILLATIONS LIBRES DE SYSTEMES AMORTIS A UN DEGRE DE LIBERTE

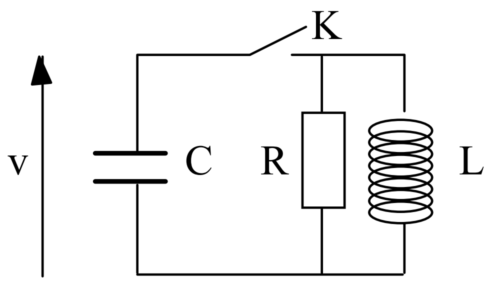
Exercice 1 : Une masse m = 20 kg est montée sur deux ressorts de raideur k=4 kN/m et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α=130 kg/s. A l'instant initial, la masse est écartée de 5 cm de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale.



a) Calculer le déplacement et la vitesse de la masse m en fonction du temps.

b) Quels sont le déplacement et la vitesse à l'instant t=1 s?

Exercice 2 : Le circuit ci-contre est constitué d'un condensateur de capacité C=1µF, d'une bobine d'inductance L=0.1mH et d'une résistance R pouvant prendre les valeurs 1Ω , 5Ω et 1kΩ. Le condensateur est initialement chargé sous une tension de 5V. A l'instant t=0s, on ferme brusquement l'interrupteur K.



1) Etablir l'équation différentielle qui régit les variations de la tension v(t) aux bornes du condensateur.

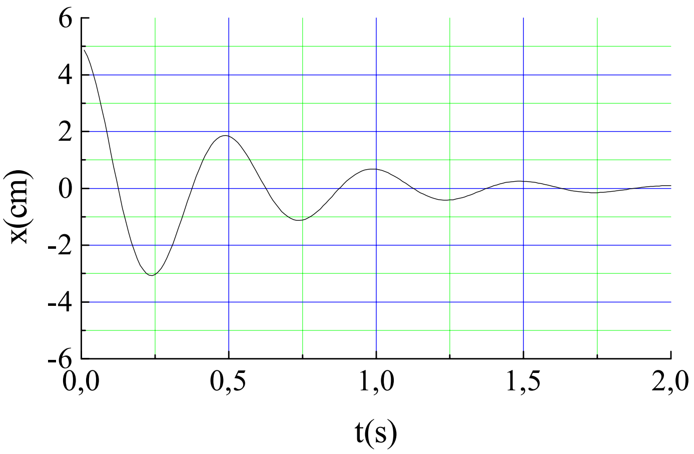
2) Pour les trois valeurs de la résistance:

a) Quelles sont les valeurs de δ et ω_0 ?

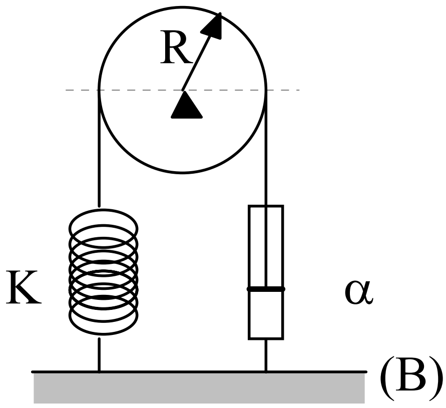
b) En déduire les variations de v(t) au cours du temps.

c) Tracer le graphe de v(t) en fonction du temps.

Exercice 3 : Un bloc de masse 25 kg est monté sur un support en caoutchouc, de masse négligeable, qui se comprime de 6.1cm sous ce poids. Quand le bloc vibre librement, on enregistre les positions de la masse après l'avoir déplacé de 5cm à partir de sa position d'équilibre (voir figure ci-contre). Sachant que le tapis de caoutchouc peut être symbolisé par un ressort de raideur K associé à un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α , calculer ces coefficients K et α .

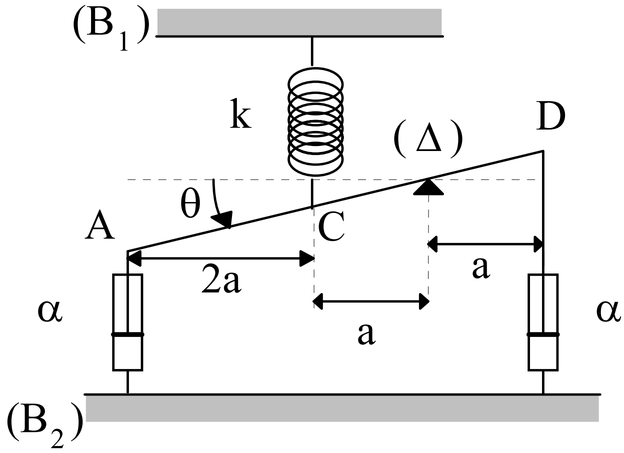


Exercice 4 : Le système de la figure ci-contre est constitué d'un cylindre homogène de masse M et de rayon R en rotation autour de son axe de révolution fixe. Un fil inextensible, de masse négligeable, entraîne le cylindre sans glissement sur sa périphérie ; ses deux extrémités sont reliées à un bâti fixe (B) par un ressort de raideur K et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. Quelle la valeur critique du coefficient α ?



Exercice 5 :

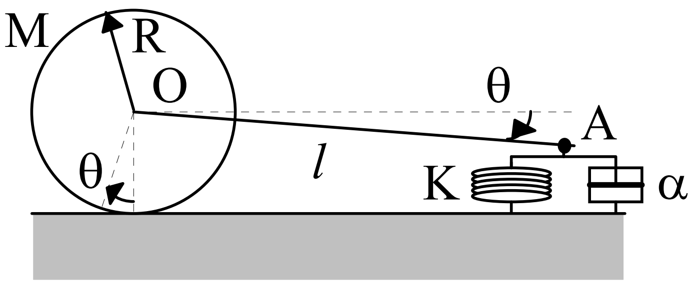
Le système mécanique de la figure ci-dessus est constitué d'une tige rectiligne AD, homogène, de masse M=3kg et de longueur L=2m. Cette tige peut tourner, dans le plan vertical, sans frottement, autour d'un axe horizontal (Δ) fixe. Les extrémités A et D de la tige sont reliées au bâti fixe B_2 par deux amortisseurs identiques de coefficient de frottement visqueux α. Le point C, milieu de la tige, est relié au bâti B_1 par un ressort de raideur k. A l'équilibre, la tige est horizontale.



Lorsque la tige est écartée de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 puis lâchée sans vitesse initiale, elle prend un mouvement oscillatoire amorti de pseudo-période 1s. On constate qu'au bout de 5 pseudo-périodes, l'amplitude est égale à 20 % de l'amplitude initiale. En déduire la valeur numérique de α puis celle de k.

Exercice 6:

Le système de la figure ci-contre est constitué d'un cylindre homogène de masse M=1kg et de rayon R=10cm, qui roule sans glisser sur un plan horizontal. Une tige OA de longueur l=1m et de masse négligeable, est soudée perpendiculairement sur l'axe O du cylindre. Son extrémité A est reliée au plan horizontal par l'intermédiaire d'un ressort de raideur K et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. A l'équilibre, la tige OA est horizontale. lorsque cette tige est écartée de cette position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale, le système effectue des oscillations de petite amplitude faiblement amorties.

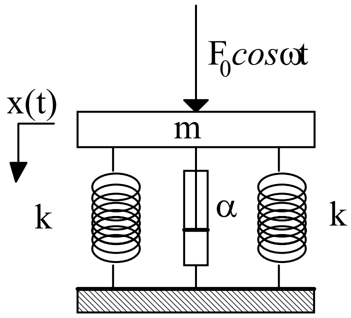


1/ On supposera que la longueur l de la tige est grande devant le rayon R du cylindre. Montrer que dans le cas des oscillations de faibles amplitudes, on peut considérer que l'extrémité A de la tige n'effectue que des oscillations verticales.

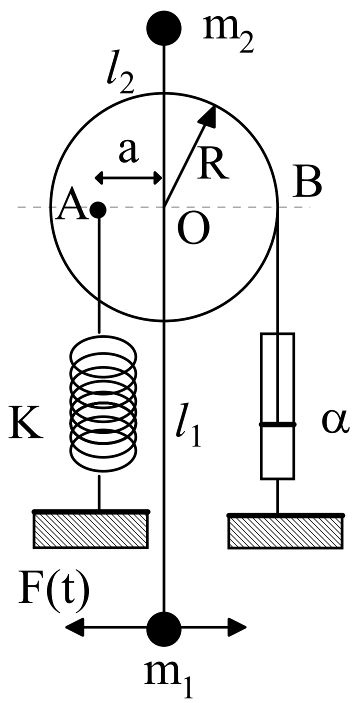
2/ Sachant que la période des oscillations est T=1s et que l'amplitude des vibrations chûte de moitié après 5 périodes d'oscillation, calculer la raideur K du ressort et le coefficient de frottement visqueux α.

OSCILLATIONS FORCEES DE SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE

Exercice 1: Dans la figure ci-contre, on a:
$m = 4.5$ kg, $k = 3500$ N/m, $\alpha = 30$ kg/s, $F_0 = 3$ N, ω=10 rd/s.
Déterminer l'amplitude de vibration du bloc de masse M et l'amplitude de la force transmise au sol.

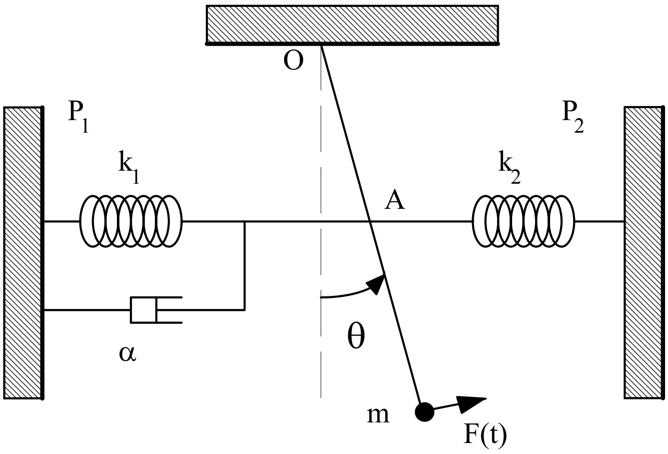


Exercice 2 : Un disque circulaire homogène, de masse M, de rayon R, peut osciller sans frottements autour de son axe horizontal 0. Deux masses m_1 et m_2 sont soudées aux extrémités d'une tige de masse négligeable liée rigidement au disque et passant par O. Les distances de m_1 et m_2 au centre sont notées respectivement l_1 et l_2. Un ressort vertical, de constante de raideur K a une extrémité fixe et l'autre est reliée au disque en un point A situé à une distance a de O. En position d'équilibre la tige est verticale avec m_1 en bas et le point A est au même niveau que le centre O. Le disque subit un frottement visqueux de coefficient α au point B. La masse m_1 est soumise à une force $F(t)=F_0 \cos(\Omega t)$ perpendiculaire à la tige.
Valeurs numériques :
M=1kg, $m_1 = m_2 = 0.1$kg, K=16N/m, R=20cm, l_1 =50cm,
l_2 =25cm, a=10cm, g=10m/s^2 , α=7.2510^{-2} kg/s.
a) Etablir l'équation différentielle du mouvement.
b) Trouver sa solution en régime permanent.
c) Calculer le facteur de qualité Q du système.
d) Déterminer la valeur de F_0 pour qu'à la résonance l'amplitude maximale soit égale à π/30 rad.



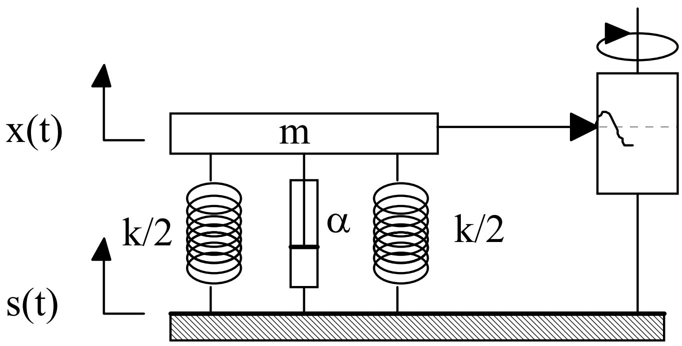
Exercice 3 :

La masse m, représentée sur la figure ci-contre, est soudée à l'extrémité de la tige de longueur *l* de masse négligeable. Cette masse est soumise à une force perpendiculaire, sinusoïdale de pulsation ω. L'autre extrémité est articulée au point O. La tige est reliée au point A au bâti fixe B_1 par un ressort de coefficient de raideur k_1 et un amortisseur dont le coefficient de frottement vaut α. Elle est, en outre, reliée au bâti fixe B_2 par un ressort de raideur k_2. La distance OA est égale à $l/2$.



1. Déterminer l'expression de l'amplitude des oscillations en fonction de la pulsation ω. En déduire la pulsation de résonance.
2. Déterminer la puissance instantanée et la puissance moyenne fournie au système.
3. Déterminer la puissance instantanée et la puissance moyenne dissipée dans le système. Conclusion.

Exercice 4 : Le dispositif mécanique ci-contre représente le schéma de principe d'un appareil de mesure de vibrations. La masse m est liée par deux ressorts et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α, un support rigidement lié au système mécanique dont on veut étudier les vibrations. Le mouvement du support est repéré par s(t) tandis que le mouvement de la masse est repéré par x(t). On étudie des vibrations sinusoïdales de la forme $s(t) = S_0 \cos(\Omega t)$.



L'origine est prise à la position d'équilibre.

1) Ecrire le lagrangien du système. En déduire l'équation du mouvement de la masse m en fonction de la coordonnée relative $y(t) = x(t) - s(t)$.

2) Déterminer la solution stationnaire y(t).

3) Dans le cas de ressorts de faible raideur, la pulsation propre ω_0 est petite devant la pulsation Ω. Donner dans ce cas l'expression de y(t). Montrer que l'on peut ainsi déterminer facilement l'amplitude S_0 de la vibration (on a réalisé ainsi un vibromètre).

4) Lorsque la raideur des ressorts est élevée, la pulsation propre ω_0 est grande devant la pulsation Ω des vibrations. Montrer , dans ce cas, que l'on peut déterminer facilement l'accélération du support (on a ainsi réalisé un accéléromètre).

Exercice 5: (suite de l'exercice 5 de la page 13)

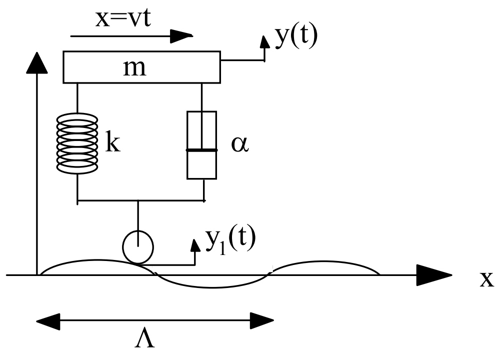
Le bâti B_1 est maintenant animé d'un mouvement vertical sinusoïdal donné par: $x = X \cos(\Omega t)$ où X = 1 cm.

1/Montrer que l'équation différentielle qui régit le mouvement du système peut s'écrire:

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0 \cos(\Omega t)$$

On précisera de manière explicite le terme A_0. Calculer sa valeur numérique.
2/ Quelle est l'expression de la solution θ(t) lorsque le régime permanent est établi? Vérifier que le système est très faiblement amorti; en déduire la fréquence de résonance et l'amplitude de θ(t) à la résonance.
3/ Quelle est, à la résonance, l'amplitude de la force F_T transmise au sol par chaque amortisseur?

Exercice 6 : Un véhicule roulant est un système complexe à plusieurs degrés de liberté. La figure ci-contre peut être considérée comme une première approximation d'un véhicule qui se déplace sur une route ondulée décrite par le profil y_1 (t). Dans ce modèle simplifié, on suppose que:



- La raideur élastique des pneus est infinie, c'est-à-dire que les ondulations de la route sont intégralement transmises à la suspension du véhicule.
- Les roues ne décollent pas de la chaussée.
- On s'intéresse uniquement au déplacement vertical y(t) du véhicule dans le plan de la figure.
- On se place dans le cas simple où le véhicule se déplace horizontalement à une vitesse constante v sur une route à profil sinusoïdal $y_1(x)=Y_1 \sin(2\pi x/\Lambda)$.

1) Etablir l'équation différentielle qui régit les variations au cours du temps de la coordonnée y du véhicule.
2) En déduire l'amplitude Y du mouvement du véhicule dans le sens vertical .
3) Application numérique m=350 kg, k=350 kN/m, v=100km/h, Λ=5m, Y_1 =20cm;
  a) pour α=2000 N.s/m,
  b) pour α=200 N.s/m.

Exercice 7 :

Les machines tournantes (moteurs électriques, turbines, machines à laver, etc...) peuvent être le siège de vibrations importantes car très souvent le centre de masse ne coïncide pas avec l'axe de rotation. Pour limiter ces vibrations on utilise des supports antivibratoires constitués généralement de caoutchouc renforcé. En raison de leurs propriétés mécaniques ces supports peuvent être modélisés par un amortisseur en parallèle avec un ressort.

On se propose d'étudier à titre d'exemple le cas d'une machine à laver le linge (figure1). Soit M la masse de cette machine. La partie tournante est constituée d'un tambour de rayon e tournant à une vitesse angulaire constante ω. On considère que la masse tournante est constituée par le linge de masse m. Pour des raisons de simplicité, on suppose que le lave-linge ne peut effectuer que des mouvement verticaux repérés par la coordonnée y.
1) Etablir l'équation différentielle du mouvement pour la coordonnée y.
2) Montrer qu'un tel dispositif est équivalent au schéma simplifié de la figure 2; donner l'expression de F_{eq} .
3) Dans l'hypothèse des faibles amortissements ($\delta \ll \omega_0$), tracer et commenter le graphe de l'amplitude Y du déplacement vertical du lave-linge en fonction de la vitesse de rotation.

4) Calculer l'amplitude de la force transmise au sol à la résonance.

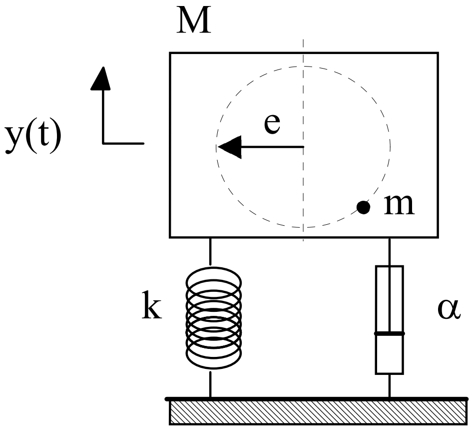


Figure 1

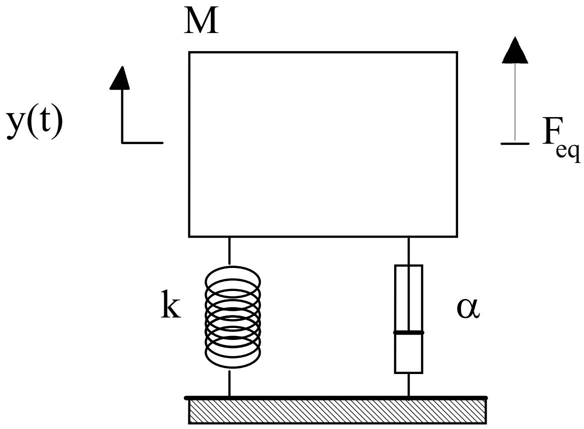
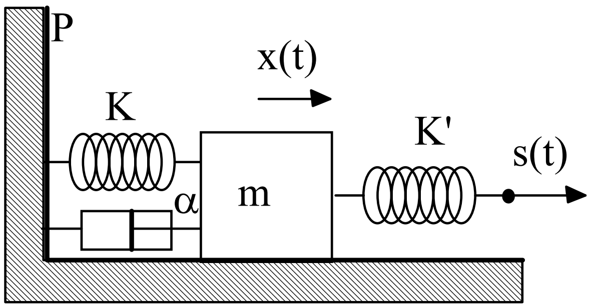


Figure 2

Exercice 8: Soit une masse m liée à un support P par un ressort de constante de raideur K et par un amortisseur à frottement visqueux de coefficient α. L'autre extrémité de la masse est liée à un ressort de constante de raideur K'. Le point d'attache de K' est soumis à un déplacement s(t) sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude S_0.



1/ Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse m. En déduire la pulsation propre ω_0 et la force excitatrice agissant sur m.

2/ Trouver le déplacement en régime permanent de la masse m et établir l'expression de son amplitude de vibration X_0 en fonction de la pulsation ω.

3/ Calculer le coefficient d'amortissement α pour que l'amplitude des mouvements de la masse m soit égale à $S_0/10$ lorsque $\omega=\omega_0$.

A.N.: K = K' = 10 N/m ; m = 0,1 kg ; S_0 = 1 cm

4/ Déterminer le module de l'amplitude de la force transmise au support P.

5/ On définit comme facteur de transmission T, le rapport entre le module de l'amplitude de la force transmise au support P et celui de l'amplitude de la force excitatrice agissant sur la masse m :

$$T = \frac{|F_{trans}|}{|F_{exc}|}$$

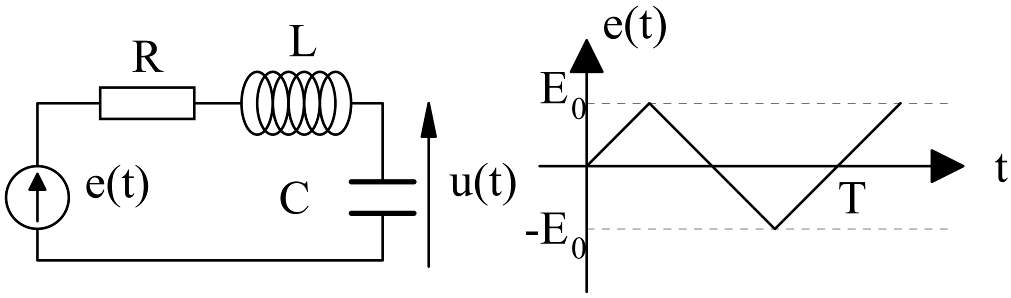
a/ Déterminer T.

b/ Calculer T pour $\omega = \sqrt{2}\omega_0$

A.N.: K = K' = 10 N/m ; m = 0,1 kg et α = 100 kg/s

c/ Que devient T pour $\omega >> \omega_0$? Conclusion.

Exercice 9 :



Le circuit RLC ci-dessus est alimenté par un générateur délivrant une force électromotrice périodique e(t) telle que représentée sur le schéma.

1) Donner le développement en série de Fourier de e(t).

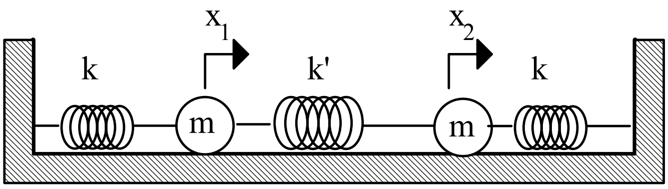
2) Déterminer la tension u(t) aux bornes du condensateur en régime permanent.

3) Faire l'application numérique pour E_0=10V, f=1/T=1600Hz, L=100mH, C=0.1µF, R=200 Ω

Que remarque-t-on? ce résultat est-il valable pour d'autres valeurs de la fréquence du générateur?

OSCILLATIONS LIBRES DES SYSTEMES A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE

Exercice 1: Soit le système mécanique représenté par la figure ci-contre, composé de deux oscillateurs linéaires (m,k) couplés par un ressort de raideur k'.



1. Ecrire le lagrangien du système.
2. a) Mettre ce Lagrangien sous la forme:

$$L = \frac{1}{2} m\left[\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \omega_0^2\left(x_1^2 + x_2^2 - 2Cx_1x_2\right)\right].$$

Donner les expressions de ω_0^2 et C (coefficient de couplage).

b) En déduire les équations du mouvement.

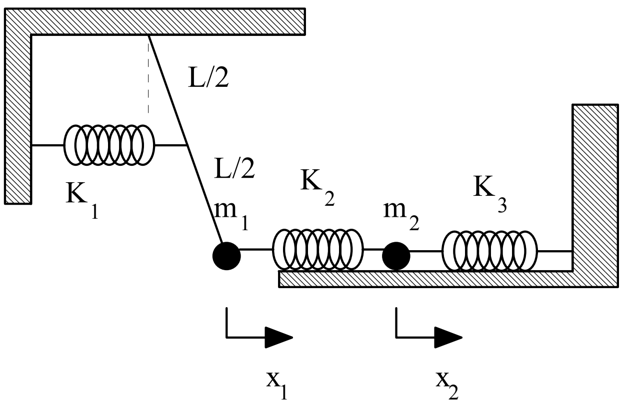
3. a) Déterminer les pulsations propres du système.

b) Sachant que $T_0=2\pi/\omega_0$ =0,5s et C=0,3, calculer les valeurs numériques des périodes propres.

4. Le coefficient de couplage C étant faible, donner les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ avec les conditions initiales suivantes: à t=0s: $x_1(0) = X_0, \dot{x}_1(0) = 0$ et $x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0)$. Quel phénomène physique observe-t-on ?
5. a) Tracer l'allure des courbes représentatives de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

b) Calculer le temps t_1 au bout duquel l'énergie se trouvant à l'instant t=0s dans le premier oscillateur (donné par x_1), est intégralement transférée pour la première fois au second

Exercice 2: Soit le système mécanique représenté figure ci-contre. Les variables $x_1(t)$ et $x_2(t)$ représentent les déplacements horizontaux (à partir de l'équilibre) des masses m_1 et m_2 dans le cas des petites oscillations. La tige de longueur L est de masse négligeable.



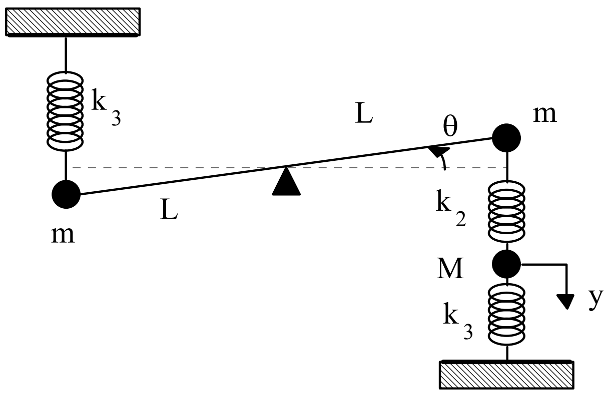
On se place dans le cas où: $k_1=k_2=k_3=k$ et $m_1=m_2=m$. On posera:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{5k}{4m} + \frac{g}{L}\right) = \frac{2k}{m}$$

1. Calculer les pulsations propres
2. Déterminer les rapports des amplitudes de chacun des modes.
3. En déduire l'expression générale des mouvements de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
4. Donner les solutions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ si à t=0s, on a:

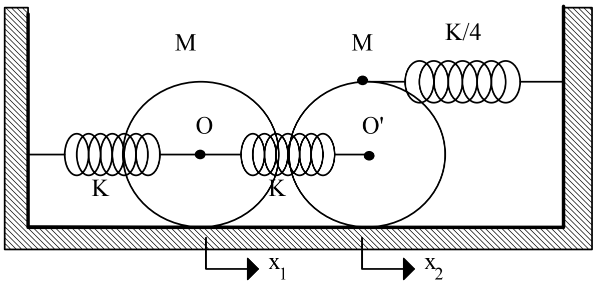
$x_1(0) = x_0, \dot{x}_1(0) = 0$ et $x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$

Exercice 3: Soit le système mécanique suivant comprenant entre autres une barre horizontale de masse négligeable et qui peut pivoter sans frottement autour d'un axe passant par son milieu. On prendra M=2m et $k_1=k_2=k_3=k$



1. Etablir les équations régissant les petites oscillations.
2. Trouver les pulsations propres et les rapports des amplitudes pour les différents modes.
3. Ecrire les solutions générales y(t) et θ(t).

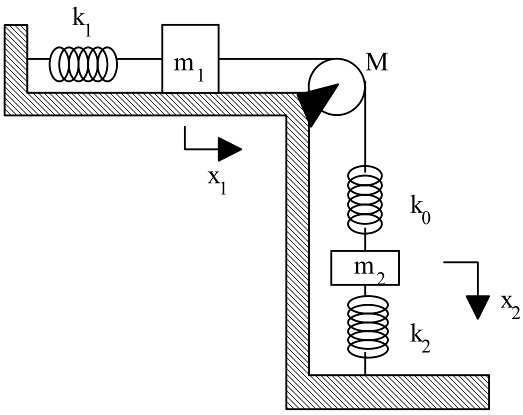
Exercice 4: On considère le système ci-contre constitué de deux cylindres identiques, homogènes, de rayon R, et de masse M. Les cylindres roulent sans glisser sur une plateforme horizontale. Les cylindres roulent sans glisser autour de leur axe O et O' auxquels sont reliés les ressorts K.



Dans le cas des faibles oscillations et en prenant les déplacements $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des centres O et O' des cylindres comme paramètres, déterminer:

1. Le Lagrangien du système.
2. Les pulsations propres du système et les rapports des amplitudes de chacun des modes.
3. Les solutions générales du mouvement sachant qu'à t=0s: $x_1 = x_2 = 0$ et $\dot{x}_1 = v_1, \dot{x}_2 = v_2$
4. Que deviennent ces solutions lorsque : a)$v_1=v_2$ et b) $v_1=-v_2$?

Exercice 5: Dans la figure ci-contre, M et R représentent respectivement la masse et le rayon de la poulie. x_1 et x_2 représentent les écarts des deux masses par rapport à leur position d'équilibre. On prend: $M=2(m_2-m_1)$ et $m_2=m$; $k_0=k_1=k_2=k$.



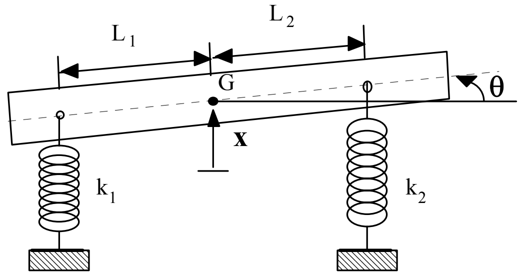
1. Ecrire le Lagrangien du système.
2. Déterminer les pulsations propres et le rapport des amplitudes de chacun des modes en fonction de m et k.

Exercice 6 :

Sur la figure ci-dessous, nous avons schématisé un véhicule avec sa suspension (sans amortisseurs). Nous supposons que les ressorts restent verticaux. La masse du véhicule est m et son moment d'inertie par rapport à un axe horizontal D passant par le centre de gravité G et perpendiculaire au plan de la figure, est J_0. Le déplacement du centre de gravité par rapport à l'équilibre est repéré par x (pompage). L'angle θ (tangage) que fait le chassis avec le sol, par rotation autour de D, sera supposé petit. L'inclinaison sur les côtés (roulis) est supposée nulle.

On donne les valeurs suivantes:

- masse du véhicule m=1000kg
- distance entre l'axe avant et G: L_1=1m
- distance entre l'axe arrière et G: L_2=1.5m
- constante de raideur du ressort avant: k_1=18kN/m
- constante de raideur du ressort arrière: k_2=18kN/m
- moment d'inertie du véhicule: $J_0=mr^2$; r=0.9m



1. Déterminer les pulsations propres du système ainsi que le rapport des amplitudes dans chacun des modes.
2. Ecrire les solutions de x(t) et θ(t).
3. a/ Quelle condition doit être réalisée si l'on désire avoir un découplage entre x et θ?
   b/ Quelles sont alors les fréquences propres de pompage f_p et de tangage f_t?

Exercice 7:

1. Déterminer les pulsations propres du circuit électrique de la figure 1 ci-dessous où M est le coefficient d'inductance mutuelle.
2. On définit le coefficient de couplage du circuit par

$$\Gamma = M/\sqrt{L_1 L_2} \quad \text{avec } -1 \le \Gamma \le 1$$

Calculer les pulsations propres en fonction de Γ pour $L_1C_1=L_2C_2$ dans les cas suivants:

a) selfs éloignées (Γ=0)

b) selfs rapprochées (|Γ|=1)

On donne L_1=1 mH et C_1=1μF.

3. Pour quelles valeurs de L_1', L_2' et L_3', le circuit électrique de la figure 2 admet les mêmes pulsations propres que le circuit précédent ?

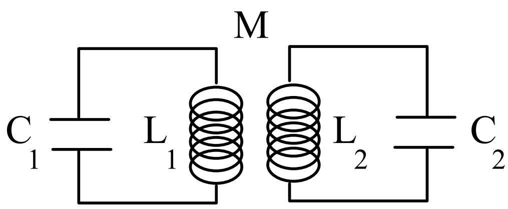


Fig.1

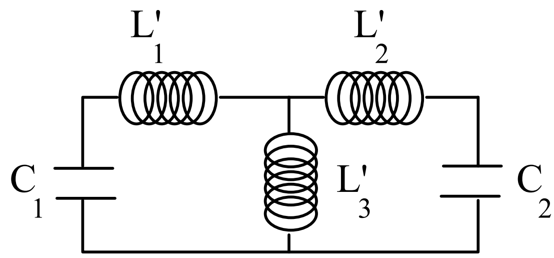
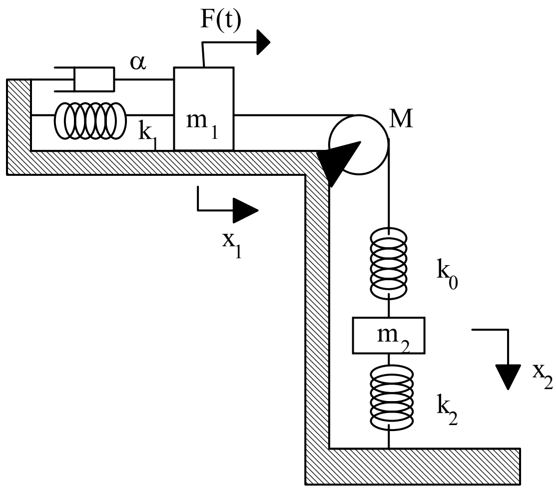


Fig.2

OSCILLATIONS FORCEES DES SYSTEMES A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE



Exercice 1: Dans la figure ci-contre, M et R représentent respectivement la masse et le rayon de la poulie, x_1 et x_2 les écarts des deux masses par rapport à leur position d'équilibre. On prend: $M=2(m_2-m_1)$ et $m_2=m$; $k_0=k_1=k_2=k$. Le système sera étudié en régime permanent avec :
$F(t)=F_0 \cos(\omega t)$.
1/Calculer l'impédance d'entrée.
2/Calculer les vitesses $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$.
3/ a)A quelle pulsation la masse m_1 reste-t-elle immobile ? b)Dans ce cas, quelle est l'amplitude d'oscillation de la masse m_2 ?
4/a)A quelles pulsations, la vitesse de la masse m_1 est en phase avec la force F(t) ? b)En comparant ces pulsations à celles calculées dans l'exercice 5 de la série 7, déduire le déphasage de $\dot{x}_2$ par rapport à F(t) pour chacune des pulsations.

Exercice 2 :
1/Etablir les équations différentielles régissant le fonctionnement des systèmes représentés par les figures 1 et 2.
2/Pour $\omega^2=5k/4m_1 + g/r$,$m_1=m_2$ pour la figure 1 et $\omega^2=k_2/m$,$m=M/2 + m_2$ pour la figure 2, calculer en régime permanent sinusoïdal :

a)l'impédance d'entrée.

b)$\dot{y}_1$, $\dot{y}_2$, y_1 et y_2 .

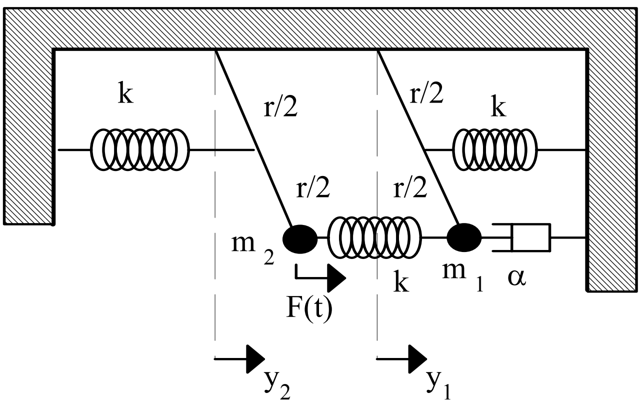


FIG.1

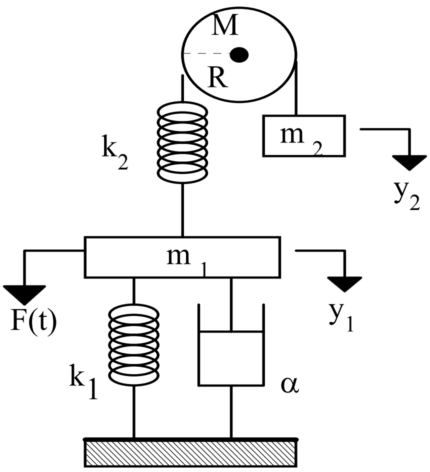


FIG.2

Exercice 3:

Pour les systèmes mécaniques des figures 1 et 2 et avec $F(t)=F_0\cos(\omega t)$ et pour $\omega^2=k_1/m_1$, calculer:

1)L'impédance d'entrée .

2)La puissance instantanée fournie par le générateur mécanique, la puissance instantanée dissipée par le système. Comparer et commenter.

3)La puissance moyenne fournie par le générateur mécanique, la puissance moyenne dissipée par le système. Comparer et commenter.

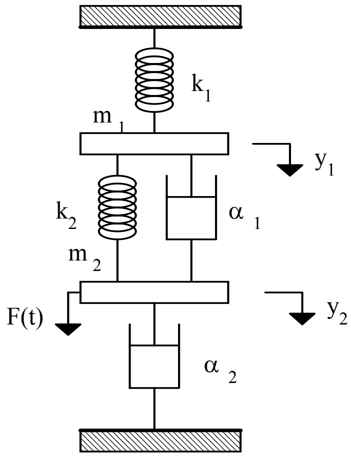


FIG.1

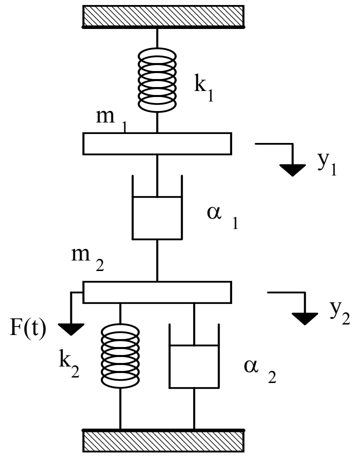


FIG.2

Exercice 4:

1/Ecrire les équations différentielles qui régissent les systèmes des figures 1 et 2. On prendra $F(t)=F_0 \cos(\omega t)$ et $e(t)=E_0 \cos(\omega t)$.

2/Y-a-t-il analogie entre les deux systèmes? Si oui, donner les correspondances entre les éléments électriques et mécaniques; préciser obligatoirement les sens des coordonnées, des courants dans chaque branche ainsi que la polarité de la f.é.m du générateur.

3/Comment se comportent les deux systèmes lorsque la pulsation ω est égale à $\sqrt{k/m}$ et $1/\sqrt{LC}$ respectivement ?

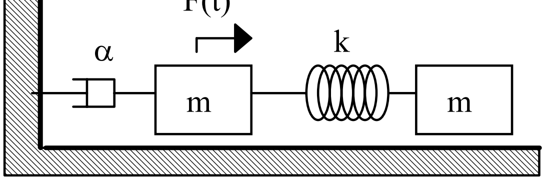


Fig.1

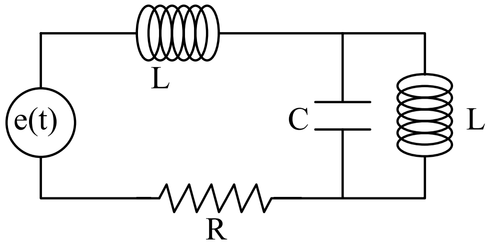
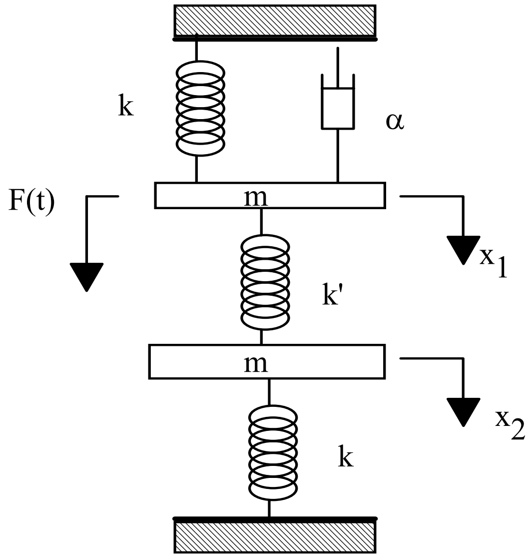


Fig.2

Exercice 5: Soit le système mécanique de la figure ci-contre. Une force sinusoidale d'amplitude F_0 et de pulsation ω est appliquée sur la masse repérée par la coordonnée x_1.



1/ Donner le schéma électrique équivalent dans l'analogie force-tension.

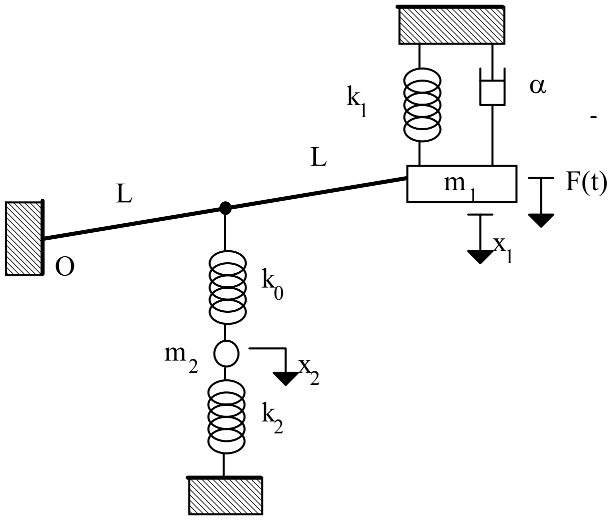
2/

a)Calculer l'impédance électrique d'entrée .

b)Pour quelle pulsation a-t-on anti-résonance ? Déterminer alors la puissance moyenne fournie par le générateur.

3/ Décrire le mouvement des deux masses du système mécanique analogue pour la pulsation d'anti-résonance ?

Exercice 6: Soit le système mécanique suivant. La masse m_1 est soumise à une force verticale, sinusoidale d'amplitude F_0 et de pulsation ω. La tige, de longueur 2L, est de masse négligeable; elle peut tourner sans frottement autour de son extrémité fixe O. On considère les mouvements de faible amplitude dans le cas suivant:



$m_1 = m_2/2 = m_0$ et $k_1 = k_2/2 = k_0/4 = k$

1/ Montrer que les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme suivante:

$$\frac{M}{2}\ddot{x}_1 + \alpha\,\dot{x}_1 + K(x_1 - x_2) = F(t)$$

$$M\ddot{x}_2 + K(x_2 - x_1) + 2K\,x_2 = 0$$

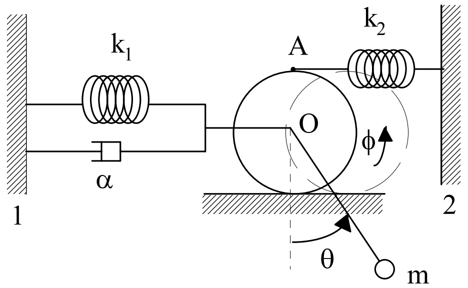
Déterminer M et K en fonction de m_0 et k.

2/ Ecrire les équations précédentes en fonction des vitesses $\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$.

3/ a)Calculer la (ou les) pulsation(s) pour laquelle la vitesse de la masse m_1 est en phase avec la force d'excitation en régime stationnaire. b)Quelle est dans ce(s) cas la puissance moyenne dissipée dans le système?

4/ On considère le cas où la pulsation ω de la force d'excitation est telle que $\omega = \sqrt{3K/M}$. a)Calculer la vitesse de la masse m_1; en déduire la valeur de l'impédance d'entrée. Commenter. b)Trouver le module de l'amplitude du déplacement de la masse m_2. c) Pour cette pulsation, donner le schéma électrique équivalent dans l'analogie force-tension .

Exercice 7: Un cylindre homogène de masse M et de rayon R, roule sans glisser sur une plate-forme horizontale. Une tige de masse négligeable et de longueur *l,* oscille librement autour du point O à une extrémité et comporte une masse ponctuelle m à son autre extrémité. Les points O et A sont reliés aux bâtis fixes respectivement par un ressort de raideur k_1 , un amortisseur de coefficient de viscosité α, et un ressort de raideur k_2 (voir figure ci-contre).



Ce système constitue un système à deux degrés de liberté. On choisit les coordonnées θ et ϕ pour décrire ce système. A l'équilibre $\theta=\phi=0$. Dans le cas des petites oscillations et pour $k_1 + 4k_2 = k = mg/l$ et $m=3/2M$.

1. Donner les pulsations propres du mouvement.
2. Le bâti 2 vibre à une pulsation ω avec une amplitude a. En négligeant l'amortissement, calculer les pulsations de résonance et d'anti-résonance. On pourra utiliser les coordonnées $x_1 = l\theta$ et $x_2 = R\phi$
3. Donner le schéma électrique équivalent.

Exercice 8: Dans le récepteur ci-dessous la bobine mobile, de coefficient de self-inductance négligeable, est constituée d'un fil de longueur l et de résistance néligeable. Elle est liée à une masse m qui est reliée à un bâti fixe par un ressort de constante de raideur k. Ce système est amorti et la constante d'amortissement est α. La masse m est mise en mouvement par l'action de la force F(t); sa position est repérée par son écart x par rapport à sa position d'équilibre. On considère le cas d'un force F(t) sinusoïdale d'amplitude F_0 et de pulsation ω.

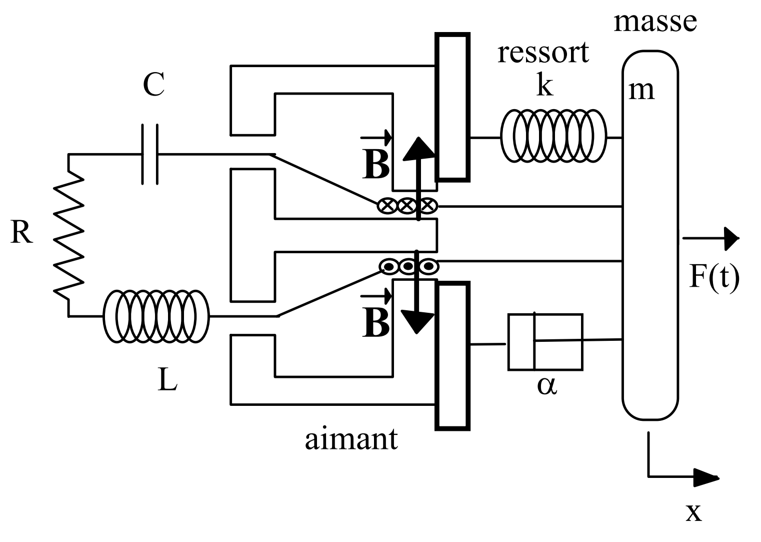
1/Le circuit électrique est-il traversé par un courant lorsque:

a)$B=0$ et $F_0=0$; b)$B\neq 0$ et $F_0=0$; c)$B=0$ et $F_0\neq 0$ et d)$B\neq 0$ et $F_0\neq 0$

2/Etablir les équations intégro-différentielles régissant le fonctionnement de ce système . En déduire l'impédance mécanique d'entrée.

3/Calculer le rendement du système.

4/A quelle pulsation , ce rendement est-il maximum ? Donner l'expression de ce rendement maximal.

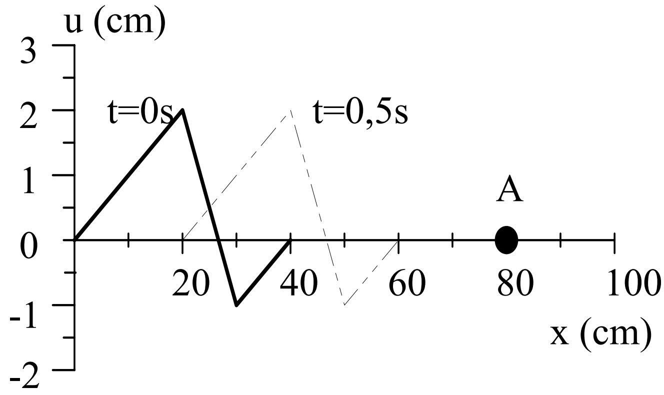


GENERALITES SUR LES ONDES

Exercice 1 : Une corde est excitée par un ébranlement transversal qui se propage le long de Ox à la vitesse v. Les formes de la corde à t = 0 et t = 0,5s sont données sur les figures ci-contre.

1/ Déterminer la vitesse de propagation de l'onde.

2/ Représenter en fonction du temps le déplacement $u(x_A,t)$ du point A ainsi que la vitesse de déplacement. $\dot{u}(x_A,t)$ du point A tel que x_A =80 cm.



N.B.: Il est recommandé de résoudre le problème graphiquement.

Exercice 2 : Vérifier que les fonctions suivantes:

a/ $u(x,t) = A\sin\left(\omega\left(t - x/V\right)\right)$ d/ $u(x,t) = A\exp\left(j\omega\left(t - x/V\right)\right)$

b/ $u(x,t) = A\cos(k(x - Vt))$ e/ $u(x,t) = A\exp\left(j\omega\left(t + x/V\right)\right)$

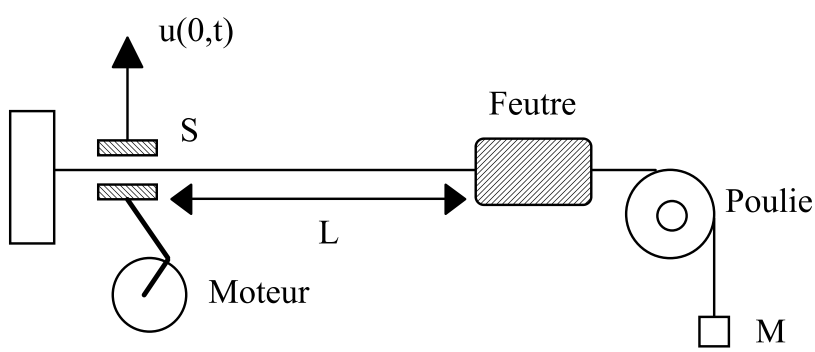
c/ $u(x,t) = \alpha(x + Vt)^2$

sont solutions de l'équation: $\partial^2 u/\partial t^2 = V^2\, \partial^2 u/\partial x^2$, si x,t et V représentent respectivement la position, le temps et la vitesse de propagation. Déterminer les dimensions des constantes A, ω, k et α.

Exercice 3 : On étudie la propagation d'un ébranlement transversal sur une corde. Cet ébranlement se propage dans le sens des x croissants avec une vitesse V. A l'instant t=0s, la forme de la corde est donnée par: $u(x,0) = Ae^{-\alpha x^2}$. Donner l'expression de la forme u(x,t) de la corde à un instant t. Représenter graphiquement cette corde aux instants t=0s, et t=0.3s pour: A=1cm, α=0.5cm^{-2}, V=20cm.s^{-1}.

Exercice 4 *:*

Le dispositif représenté sur la figure ci-contre permet de communiquer à l'extrémité S d'une corde tendue horizontalement, une vibration verticale sinusoïdale entretenue : $u(0,t) = 5\sin(\omega t)$ (en cm).



1/ La longueur totale de la corde est L=5m et sa masse est m=100g. Sachant que la vitesse de propagation des ondes transversales dans une corde de masse linéique μ et tendue par une tension T est donnée par : $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ .Quelle doit être la valeur de la masse M qui tend la corde pour que la longueur d'onde des vibrations transversales de pulsation ω soit $\lambda = 1$m lorsque le moteur tourne à la vitesse de 3600 tr/mn.

2/ Juste avant la poulie P, la corde est pressée à frottement doux entre deux plaques de feutre, empêchant toute réflexion de se produire.

a/ Ecrire l'expression en fonction du temps de l'élongation u(x,t) du point A tel que SA=x.

b/ Donner les abscisses des points qui vibrent en phase avec S et de ceux qui vibrent en opposition de phase avec S.

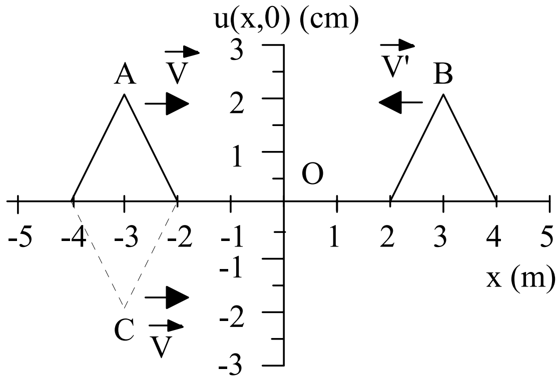
c/ Représenter sur un même graphique le mouvement de S entre les instants t=0 et t=1/30 s et le mouvement du point A tel que x=2,75m.

d/ Représenter l'aspect de la corde sur un même graphique aux instants t=0 et t=1/600s, entre x=0 et x=4m.

Exercice 5 :

1/ On considère deux ébranlements A et B se propageant le long de l'axe Ox aux vitesses V=V'=1m/s. Représenter le déplacement du point O en fonction du temps. On conseille une étude graphique).

2/ Répondre à la même question pour les ébranlements C et B.



Exercice 6 : Une onde sonore se propageant dans un tuyau est donnée par:

$$u_x(x,t) = 10^{-4} \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{10^{-4}} - \frac{x}{3.14\ 10^{-2}}\right)\right]$$

où le déplacement de particules $u_x(x,t)$ s'exprime en mm, x en m et t en s.

1/ Quelle est la direction de propagation? Expliquer pourquoi on peut dire que cette onde est plane. Quelle est la nature de l'onde (longitudinale ou transversale)? Quelle est l'amplitude A de cette onde? Calculer la pulsation ω, la vitesse de propagation V et le module du vecteur d'onde k.

2/ Quels sont les points du tuyau où l'onde est déphasée de $\pi/3$ par rapport à la source située à l'origine (x=0)?, Exprimer la distance de ces points à la source en fonction de la longueur d'onde λ.

3/ Quelle différence de phase existe-t-il entre deux points du tuyau distants de $3\lambda/4$?

4/ On superpose à cette onde, une deuxième onde progressive de même amplitude A, de même pulsation ω, de même vitesse de propagation V et se propageant dans le même sens mais déphasée de φ par rapport à la première.

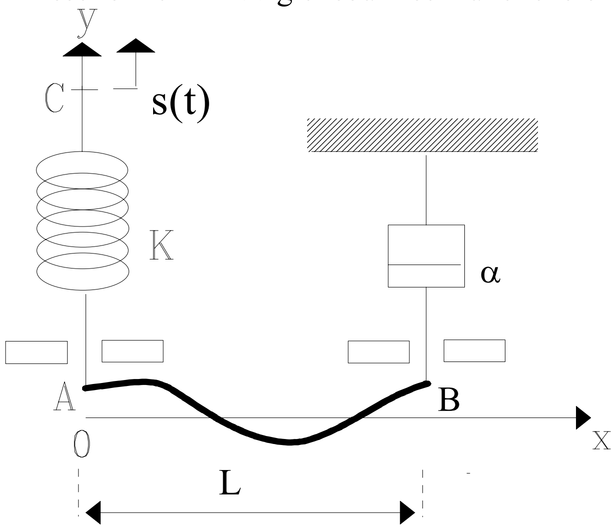
Donner l'expression de l'onde résultante (amplitude et phase en fonction de A et φ). Que devient l'onde résultante lorsque $\varphi = \pi$? Quel son peut-on alors entendre?

CORDES VIBRANTES

Exercice 1 :

Soit une corde de longueur L = 2 m, de masse totale m = 80 g et soumise à une tension T réglable. Comme indiqué sur la figure ci-contre, elle est fixée en A , à un ressort vertical de raideur K dont l'extrémité C subit un déplacement forcé vertical sinusoidal de fréquence f = 50 Hz, d'amplitude s_0 = 1 cm et décrit par:

$$s(t) = s_0 \exp(j2\pi ft)$$



La seconde extrémité B (x = L) de la corde est fixée à un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α égal à 0,2 N.s/m. Des guides parfaitement glissants n'autorisent que les mouvements verticaux (transverses) des points A, B et C. Le mouvement d'un point M quelconque d'abscisse x sur la corde est alors représenté par son élongation $u_y(x,t)$. La tension T est réglée de telle sorte qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie en B.

1/ Que représente l'amortisseur par rapport à la corde? Calculer l'impédance en un point quelconque de la corde. En déduire la tension T de la corde.

2/ En déduire la vitesse de phase V et la longueur d'onde λ.

3/ Montrer que les extrémités A et B vibrent en phase.

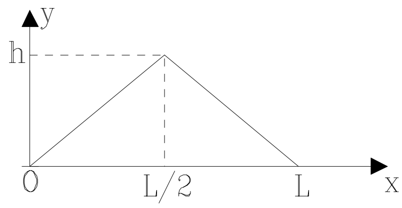
4/ Quelle est la valeur de l'impédance de la corde au point A. Calculer l'amplitude et la phase φ de l'élongation $u_y(x\ ,t)$ du point A. En déduire l'expression de l'élongation $u_y(x,t)$ d'un point quelconque de la corde. Dans quel cas la phase φ est nulle? Que vaut, dans ce cas, l'amplitude de vibration de chaque point de la corde ?

Exercice 2 :

Une corde de longueur l = 2m et de masse = 10g est tendue entre deux points fixes avec une tension T = 10N. Calculer les fréquences propres des oscillations transversales. Dessiner la corde lorsqu'elle oscille dans le mode fondamental et dans les trois premiers harmoniques.

Exercice 3 :

Une corde de longueur L et de masse m est tendue entre deux points fixes avec une tension T. A l'instant t = 0, la corde est pincée en son milieu, écartée par rapport à l'horizontale d'une distance h puis lâchée sans vitesse initiale. Les positions y(x,0) des différents points de la corde, à l'instant t = 0, sont représentés sur la figure ci-contre. Ces positions sont données par la relation :



$$\begin{cases} y(x,0) = \dfrac{2h}{L}x & \text{pour } 0 \le x \le L/2 \\ y(x,0) = \dfrac{2h}{L}(L-x) & \text{pour } L/2 \le x \le L \end{cases}$$

1/ Montrer que :

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(k_n x) \qquad \text{avec } k_n = n\frac{\pi}{L}$$

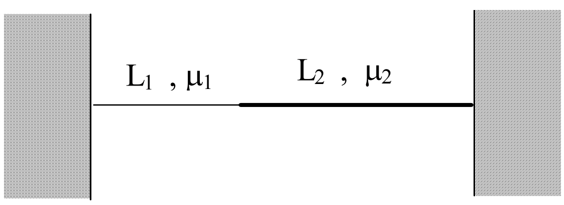
2/ Montrer que les amplitudes des modes propres d'indice n sont données par :

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L y(x,0)\ \sin(k_n x)\, dx$$

3/ Ecrire l'expression de y(x,t) en se limitant aux trois premiers harmoniques.

Exercice 4 :

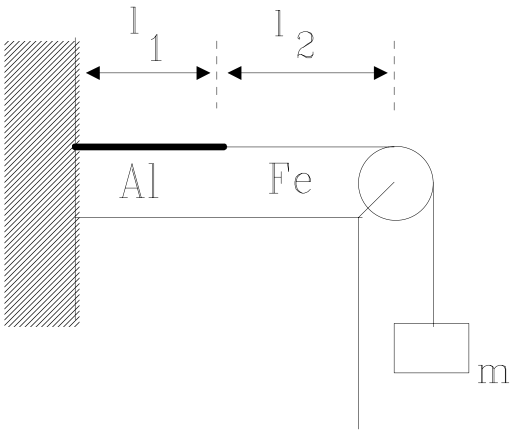
Une corde constituée de deux segments disposés bout à bout est fixée à ses deux extrémités et tendue avec une tension T (voir figure a). L_1 et L_2 désignent les longueurs des deux segments de corde; μ_1 et μ_2 représentent les masses linéiques de chaque segment de la corde. La corde est le siège de vibrations transversales polarisées rectilignement.



1/ Ecrire les conditions aux limites.
2/ En déduire l'équation aux pulsations propres.

Exercice 5 :

Un fil d'aluminium de longueur l_1 = 60,0 cm et de section droite s = 1,0 x 10^{-2} cm^2 est fixé à un fil de fer de même section. Le fil mixte, attaché à un bloc m de 10,0 kg, est disposé tel qu'indiqué sur la figure, de telle sorte que la distance de la jonction à la poulie est l_2 = 86,6 cm. La densité de l'aluminium est ρ_1 = 2,60 g/cm^3, et celle du fer est ρ_2 = 7,80 g/cm^3 .

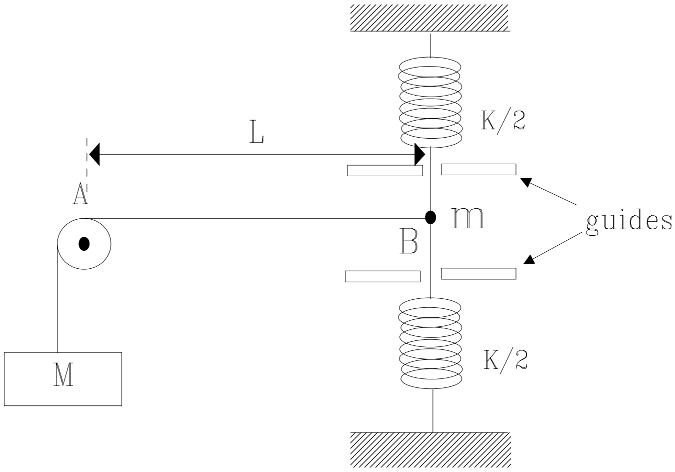


a/ Trouver la fréquence propre de vibration transversale la plus basse et pour laquelle la jonction des fils est un noeud.

b/ Quel est le nombre total de noeuds qu'on peut remarquer à cette fréquence, si ceux des extrêmités du fil ne sont pas comptés?

Exercice 6 :

Une corde de masse linéique μ est tendue, à l'aide d'une masse M, entre deux points A et B tels que AB = L. Le point A est fixe. Au point B, la corde est terminée par une masse m tenue par deux ressorts verticaux identiques de raideur K/2 (figure ci-contre). Des guides parfaitement glissants n'autorisent que les déplacements verticaux de la masse m. A l'équilibre, la corde AB est horizontale.



1/ Vibrations libres:

a/ Montrer qu'en régime de vibration harmonique la corde AB peut être considérée comme un milieu limité par deux impédances Z_A et Z_B que l'on déterminera.

b/ Calculer les coefficients de reflexion r_A (au point A) et r_B (au point B). Donner leurs modules R_A et R_B ainsi que leur argument θ_A et θ_B .

c/ Après avoir écrit les conditions aux limites en A et en B, établir l'équation aux pulsations propres de vibration de la corde.

2/ Vibrations forcées:

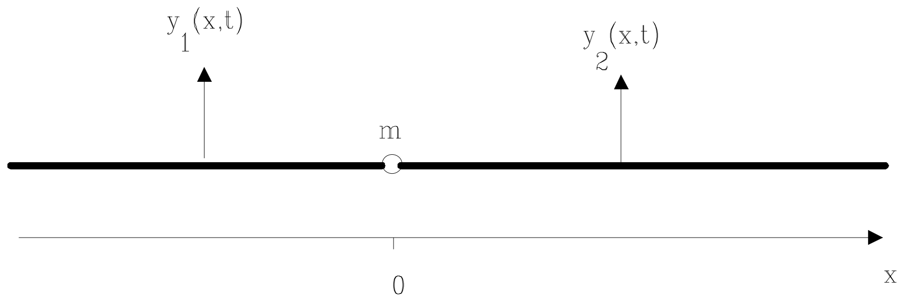
On impose au point A une vibration transversale, sinusoidale de pulsation ω et d'amplitude S_0 . La tension de la corde est la même que précédemment.

a/ Calculer l'amplitude de vibration de chaque point de la corde. Quelle est l'amplitude de vibration ainsi que la position des ventres et des noeuds de vibration? En déduire les valeurs de la pulsation ω pour mettre en résonance la corde. Les comparer aux valeurs des pulsations propres obtenues dans la question précédente.

b/ La pulsation d'excitation ω est égale à $\sqrt{k/m}$, calculer dans ce cas l'impédance d'entrée de la corde en A et en déduire l'amplitude de la force que l'on doit appliquer en A pour obtenir l'amplitude S_0.

Exercice 7 :

Une corde de longueur infinie de masse linéique μ est soumise à une tension T. Au point x = 0, on accroche une masse m. Au repos, la corde est parallèle à l'axe Ox (voir figure ci-contre).On néglige le poids de la corde ainsi que le poids de la masse m. On étudie les petits déplacements.



Une onde incidente de déplacement $y_i(x,t)$ de pulsation ω et d'amplitude a_0 arrive de $-\infty$ et se propage dans le sens des x croissants.

1/ Ecrire l'expression de $y_1(x,t)$ pour la partie des $x < 0$ et $y_2(x,t)$ pour la partie des $x > 0$ en fonction des données du problème et des coefficients de réflexion **r** et transmission **t** en déplacement au point O.

2/ Montrer que la force transverse agissant sur la masse m vaut:

$$F_y(0,t) = T\left[\frac{\partial y_2}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial y_1}{\partial x}(0,t)\right]$$

3/ En tenant compte de la continuité de la corde en x = 0 et à l'aide de la relation fondamentale de la dynamique appliquée à m, montrer que le coefficient de réflexion **r**, en x = 0, vaut:

$$\mathbf{r} = -\frac{jm\omega}{jm\omega + 2\,Z_C} \qquad \text{avec} \quad Z_C = \sqrt{\mu T}$$

Que représente le terme $jm\omega$?

4/ Démontrer que le système est équivalent à une corde s'étendant de $-\infty$ à 0 et terminée en ce point par une impédance Z (0) qui s'écrit:

$$Z(0) = jm\omega + Z_C$$

En déduire le coefficient de reflexion r, en x = 0, en fonction de Z_C et Z(0). Retrouve-t-on le résultat de la question précédente ?

5/ Calculer le module R et l'argument θ du coefficient de reflexion. Montrer que le module de **r** est toujours inférieur à 1. Quelles sont les valeurs limites de **r** lorsque $m \rightarrow 0$ et $m \rightarrow \infty$? Commenter.

6/ Calculer la position et l'amplitude des minima et des maxima de vibration pour la partie des $x < 0$. En déduire le taux d'ondes stationnaires. Quelle distance sépare la masse m du maximum le plus proche de x = 0 ? Que deviennent ces résultats lorsque $m \rightarrow 0$ et $m \rightarrow \infty$?

ONDES ACOUSTIQUES DANS LES FLUIDES

Exercice 1 : Dans les conditions normales de température et de pression, l'air est caractérisé par une masse volumique à l'équilibre ρ = 1.21 kg/m^3 et une valeur de $\gamma = c_p / c_v = 1.402$. Calculer la vitesse de propagation du son dans l'air et son impédance acoustique spécifique dans ces conditions de température et de pression (T=20°C et $P_o = 10^5$ N/m^2).

Exercice 2 : Lorsque la température est égale à 20°C, la masse volumique et le module de compression de l'eau distillée valent ρ = 998 kg/m^3 et $\kappa = 2.18\ 10^9$ N/m^2 . Calculer la vitesse de propagation du son dans l'eau et son impédance acoustique spécifique. Comparer aux résultats de l'exercice 1.

Exercice 3 : Soit une onde acoustique plane qui se propage dans l'eau avec une vitesse de 1480 m/s. Elle véhicule une puissance moyenne de 1W uniformément répartie sur une section circulaire de 40 cm de diamètre, normale à la direction de propagation. La fréquence de l'onde est égale à 24 kHz.

a) Calculer l'intensité acoustique; quel est en dB le niveau de l'intensité acoustique relativement à un niveau de référence 10^{-12} W/m^2 qui correspond à un seuil à peine audible?

b) Calculer l'amplitude de la pression acoustique, l'amplitude de la vitesse de particules et l'amplitude du déplacement de particules.

c) Comparer aux résultats que l'on aurait obtenus si cette onde se propageait dans l'air.

Exercice 4 : Une onde acoustique plane se propageant dans l'eau arrive en incidence normale à la surface de sépraration avec l'air. Calculer les valeurs numériques des rapports suivants : P_R/P_i , P_T/P_i , U_R/U_i , U_T/U_i ,$\dot{U}_R/\dot{U}_i$, $\dot{U}_T/\dot{U}_i$, I_R/I_i , I_T/I_i où U, $\dot{U}$, P et I représentent respectivement le déplacement des particules, la vitesse des particules, la pression acoustique et l'intensité acoustique. Les indices i, R et T se rapportent respectivement à l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde transmise.

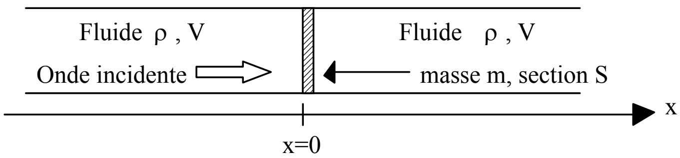
Exercice 5 : Répondre aux mêmes questions que pour l'exercice précédent en supposant que l'onde acoustique se propage initialement dans l'air et se transmet dans l'eau. Comparer aux résultats de l'exercice précédent.

Exercice 6 : On définit l'impédance acoustique d'une surface réfléchissante par : $Z_S = p_S / \dot{u}_S$ où p_S est la pression sur la surface et $\dot{u}_S$ la vitesse de particules perpendiculaire à cette surface. Dans les conditions normales de température et de pression, on considère une onde acoustique plane de fréquence 200 Hz qui se propage dans l'air avec une vitesse de 340 m/s et qui arrive en incidence normale sur un mur dont l'impédance acoustique est égale à :
Z_S = 1000-j 1300 rayleighs (M.K.S.A).

1°) Calculer le coefficient de reflexion pour la pression acoustique.

2°) Calculer le taux d'ondes stationnaires.

3°) A quelle distance du mur se trouvent le premier maximum et le premier minimum de vibration?



Exercice 7 : La figure représente un tuyau cylindique de longueur infinie et de section S qui contient un fluide de masse volumique ρ . Au point x=0, se trouve une masse m constituée d'un cylindre rigide, de section S et d'épaisseur négligeable; cette masse peut coulisser sans frottement dans le tuyau. Une onde acoustique de pulsation ω et d'amplitude de pression P_{oi} arrive de - ∞ et se propage dans le sens des x croissants avec une vitesse de propagation V.

1°) Donner l'expression de la pression $p_1(x,t)$ pour la partie des x<0 et $p_2(x,t)$ pour la partie des x>0, en fonction des données du problème et des coefficients **r** et **t** qui représentent respectivement le coefficient de reflexion et de transmission pour la pression au point x=0. En déduire l'expression de la vitesse de particules $\dot{u}_1(x,t)$ et $\dot{u}_2(x,t)$ pour chacune des deux régions x<0 et x>0.

2°) Montrer que la force résultante agissant sur la masse m est :

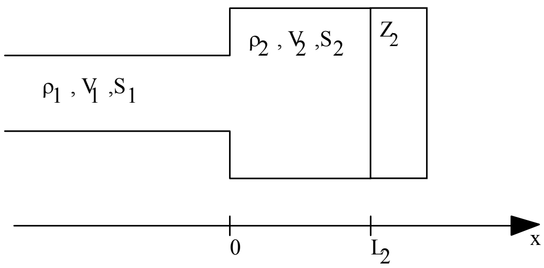
$$F_x(0,t) = S\left[p_1(0,t) - p_2(0,t)\right]$$

3°) Ecrire la continuité de la vitesse de particules en x=0 et en déduire la première relation qui relie **r** et **t.** A l'aide de la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la masse m, établir la seconde relation qui relie **r** et **t**. Montrer alors que le coefficient de reflexion **r**, en x=0, vaut :

$$\mathbf{r} = \frac{jm\omega}{\alpha + jm\omega}$$

Exprimer α en fonction des données du problème.

4°) Montrer que le module de **r** est toujours inférieur à 1. Quelles sont les valeurs limites de **r** lorsque $m \to 0$ et $m \to \infty$? Commenter le résultat.



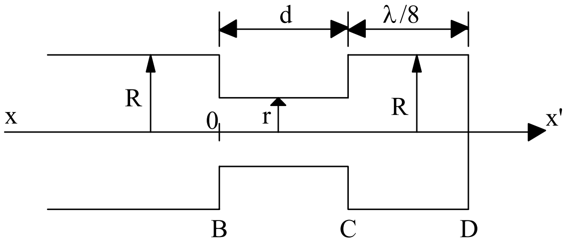
Exercice 8 : Une onde acoustique plane sinusoïdale d'amplitude de pression P se propage, à la vitesse V_1, de la gauche vers la droite dans un tuyau de longueur infinie et de section S_1 et contenant un gaz parfait de masse volumique ρ_1. A l'extrêmité de ce tuyau, en x = 0, est relié un second tuyau, de même axe et de section S_2. de longueur L_2 et contenant un gaz parfait de masse volumique ρ_2. Ce deuxième tuyau est terminé en x=L_2 par une impédance égale à son impédance caractéristique Z_2.

1°) Donner l'expression des coefficients de reflexion (r), et de transmission (t)en pression au passage d'un tuyau à l'autre.

2°) Dans le cas où $\rho_1V_1=\rho_2V_2$ et $S_1 \neq S_2$, étudier le comportement des coefficients de reflexion et de transmission pour $S_1 << S_2$ et $S_1 >> S_2$.

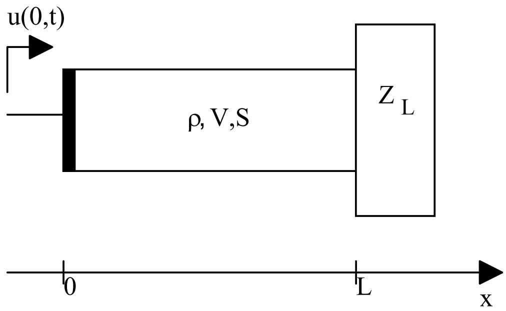
3) On considère le cas où les deux tuyaux ont la même section et contiennent le même gaz supposé parfait pour lequel $\gamma = c_p / c_v = 1.4$. Sachant que la température dans le premier tuyau est égale à T = 300°K et que dans le second tuyau elle est égale à T+ΔT, déterminer ΔT si r=0.01.

Exercice 9 : Une onde acoustique plane sinusoïdale de pulsation ω se propage à la vitesse V, de la gauche vers la droite, dans un tuyau de longueur infinie, de section circulaire de rayon R et qui contient un fluide de masse volumique ρ. A l'extrêmité de ce tuyau, en x=0, sont reliés deux tuyaux BC et CD de rayon respectif r et R et de longueur respective BC=d et CD=λ/8 où λ est la longueur d'onde. Le tuyau CD est fermé en D par une paroi rigide. On donne r/R=3/4.



Calculer l'impédance acoustique du tuyau en x=0, puis trouver d en fonction de λ pour que cette impédance soit nulle. Quelle est, dans ces conditions, la valeur du coefficient de reflexion pour la pression en x = 0 ?

Exercice 10 : Un tuyau cylindrique de section S constante est rempli d'un gaz, de masse volumique ρ, où les ondes acoustiques peuvent se propager à la vitesse V. A l'une des extrêmités du tuyau, en x=0, on place un piston plan qui est animé, suivant l'axe Ox du tuyau, d'un mouvement sinusoïdal d'amplitude U_0 et de pulsation ω. A la position x=L, le tuyau est terminé par une impédance acoustique Z_L.



A. Etude du déplacement de particules :

1°) En un point x, le déplacement de particules u(x,t) dû à la propagation de l'onde acoustique est donné par :

$$u(x,t)=Ae^{j(\omega t-kx)}+Be^{j(\omega t+kx)}$$

En tenant compte des conditions aux limites, calculer A et B en fonction de Z_L, Z_0, k et U_0 où k=ω/V et $Z_0=\rho V/S$.

2°) Dans le cas particulier où le tuyau est fermé par une paroi rigide en x=L :

a) Montrer que le déplacement peut se mettre sous la forme : $u(x,t) = U(x)\, e^{j(\omega t+\phi)}$ où U(x) est réel. Donner l'expression de l'amplitude U(x) et de la phase ϕ de l'onde résultante.

b) En déduire les positions et les valeurs des maxima et des minima de l'amplitude U(x) en valeur absolue.

c) Pour quelles fréquences obtient-on un phénomène de résonance? Quelle est alors l'amplitude du déplacement au niveau des ventres de déplacement.

d) Dans le cas où L=13λ/12, λ étant la longueur d'onde, tracer sur un graphe les variations de $|U(x)|$ en fonction de x. Echelle : 1cm = λ/12. Quel est le nombre de maxima (ventres) et de minimas (noeuds)?

B. Etude de la pression acoustique :

Répondre aux mêmes questions qu'en A.2°) pour étudier les variations de la pression acoustique en fonction de x .

ONDES ELECTROMAGNETIQUES

Exercice 1 : Une onde électromagnétique plane sinusoïdale de pulsation ω se propage dans le vide selon une direction faisant un angle θ avec Ox et contenue dans le plan xOy. Le champ électrique $\vec{E}$ de polarisation rectiligne selon Oz (vecteur unitaire $\vec{e}_z$) s'écrit en un point $\vec{r}(x, y, z)$ et à l'instant t: $\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 e^{j(\omega t - ax - by)}\vec{e}_z$.

1/ a/ Quelle relation existe-t-il entre a, b, ω, θ et c (célérité de la lumière dans le vide) ?
b/ Déterminer a et b en fonction de la longueur d'onde λ et de la direction θ de propagation de l'onde.

2/ a/ Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(\vec{r},t)$ de l'onde.
b/ En déduire l'impédance caractéristique du vide en précisant sa valeur numérique.
c/ Déterminer les composantes du vecteur de Poynting $\vec{R}$ et la valeur moyenne de son module dans le temps.
d/ Calculer la valeur moyenne dans le temps de la densité d'énergie électromagnétique en fonction de E_0, c et μ_0.

3/ Calculer les amplitudes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ d'un faisceau laser de section circulaire de diamètre d=2mm dont la puissance transportée est de 600W. On donne: la perméabilité du vide $\mu_0=4\pi 10^{-7}$ SI et la célérité de la lumière dans le vide $c=3.10^8$m/s (SI= Système International).

Exercice 2 : Une source de rayonnement électromagnétique de puissance P=500W et de longueur d'onde λ=25m émet de façon isotrope dans l'espace.

1/ Comment varie l'amplitude E_0 du champ électrique avec la distance d à la source? Calculer alors E_0 à une distance d=100km de la source de rayonnement.

2/ Un cadre formé de N=50 spires conductrices est placé dans le plan xOy à une distance d=100km de la source de rayonnement électromagnétique et a une forme rectangulaire de dimensions a=1,25m et b=0,80m et est disposé perpendiculairement au champ magnétique $\vec{B}$. Le champ électrique est polarisé rectilignement selon Oy $\left(\vec{E} = E_0 e^{j\omega t}\vec{e}_y\right)$ en O (x=0,y=0) (voir figure 1).
Exprimer le flux Φ(t) du champ magnétique à travers le cadre. Déduire la valeur efficace de la force électromotrice induite apparaissant aux bornes du cadre.

3/ Reprendre la même question pour les mêmes conditions et pour un cadre triangulaire de côtés a et b (voir figure 2). Reprendre ce calcul pour a=λ/4 et a=λ/2.

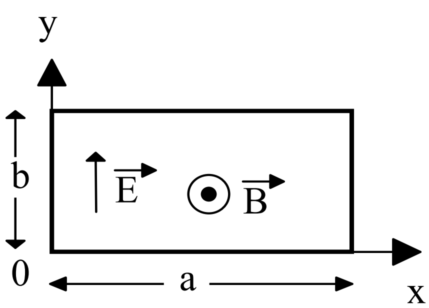


Figure 1

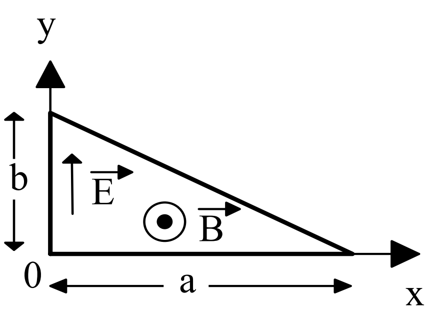


Figure 2

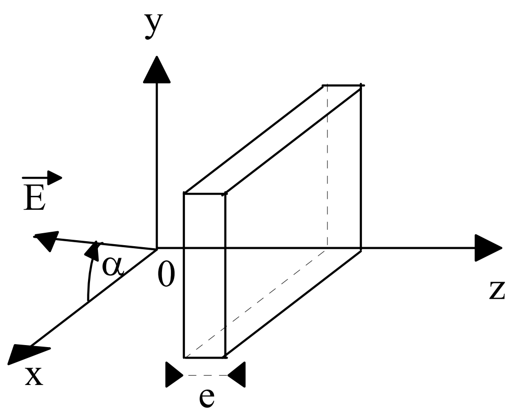
Exercice 3 :

1/ Déterminer l'état de polarisation des ondes électromagnétiques représentées par leurs champs électriques: $\vec{E}_0$, $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$.

$$\begin{cases} \vec{E}_0 \rightarrow \quad E_x = E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - kz); \quad E_y = E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - kz); \quad E_z = 0 \\ \vec{E}_1 \rightarrow \quad E_x = E_1 \cos\omega\left(t - \frac{z}{c}\right); \quad E_y = E_1 \sin\omega\left(t - \frac{z}{c}\right); \quad E_z = 0 \\ \vec{E}_2 \rightarrow \quad E_x = E_2 \cos\omega\left(t - \frac{z}{c}\right); \quad E_y = -E_2 \sin\omega\left(t - \frac{z}{c}\right); \quad E_z = 0 \end{cases}$$

2/ Quel est l'état de polarisation de l'onde dont le champ électrique est $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ avec $E_1 = E_2$?

Exercice 4 : Une onde électromagnétique plane monochromatique de longueur d'onde λ et de polarisation rectiligne se propage dans l'air selon la direction Oz. Le champ électrique est dans le plan xOy et fait un angle α=45° avec la direction Ox.



Une lame cristalline d'un matériau anisotrope d'épaisseur e est disposée parallèlement au plan xOy. Ceci a pour conséquence que chacune des directions Ox et Oy présente respectivement une vitesse de propagation V_x et V_y différentes (donc des indices de réfraction n_x et n_y différents).

1/ Calculer le déphasage entre les deux composantes E_x et E_y à la sortie de la lame.

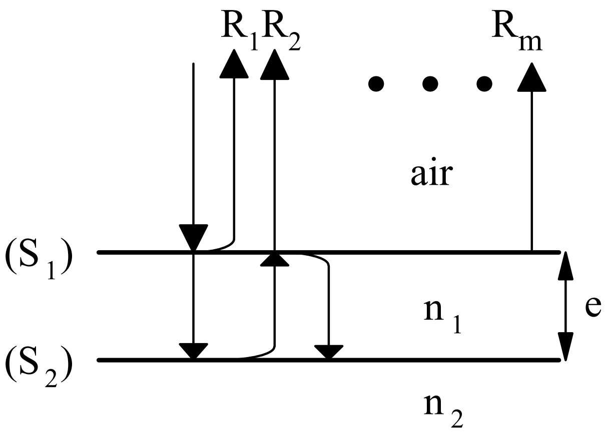
2/ Décrire les composantes du champ électrique après la traversée de la lame si ce déphasage est un multiple impair de $\pi/2$. Expliquer pourquoi on appelle cet état de polarisation: polarisation circulaire. Que se passe-t-il si le déphasage est un multiple entier de π?

3/ Calculer la plus petite épaisseur e pour obtenir une polarisation circulaire à l'aide d'une lame de quartz. n_x =1.5533 et n_y =1.5442 pour la longueur d'onde λ=5.893 10^{-7} m.

Exercice 5 : Une onde lumineuse monochromatique atteint sous incidence normale un milieu diélectrique infini d'indice de réfraction n pour la longueur d'onde λ utilisée. Donner l'expression du coefficient de réflexion r du champ $\vec{E}$ ainsi que celle du coefficient de transmission t.

Dans la suite on se propose de décrire un système capable d'annuler la réflexion de l'onde par l'utilisation d'une couche diélectrique antireflet.

Une couche diélectrique non absorbante d'épaisseur e recouvre un milieu infini. Les indices sont pour cette fréquence 1 pour l'air, n_1 pour la couche et n_2 pour le milieu supportant la couche. Des réflexions multiples se produisent aux interfaces (S_1) et (S_2). L'amplitude du champ électrique de l'onde incidente vaut a et on désigne par a_1, a_2,...., a_m celles des champs électriques réfléchis (Ondes R_1 ,R_2., R_m ... sur la figure ci-contre). L'épaisseur de la couche e est



telle que le déphasage entre les ondes consécutives réfléchies m et m+1 vaut φ.

1/ Calculer les amplitudes complexes des ondes réfléchies dans le milieu d'indice 1.

2/ Calculer l'amplitude complexe de l'onde réfléchie résultante.(On rappelle la relation: pour la suite alternée $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ pour $-1<x<0$)

3/ Quelle relation existe-t-il entre la longueur d'onde λ et l'épaisseur e pour la valeur $\varphi=\pi$ du déphasage?

4/ Calculer le coefficient de réflexion r total pour $\varphi=\pi$. A quelle condition est-il nul?

5/ Calculer l'indice et l'épaisseur d'une couche antireflet pour le système air-verre; n_{verre} =1.5 pour les longueurs d'onde du spectre visible?

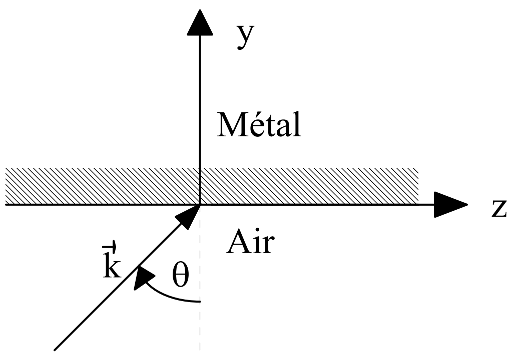
6/ Peut-on retrouver ces résultats en calculant l'impédance équivalente au milieu d'indice n_2 et de la couche mince (impédance ramenée en S_1).

Exercice 6 : Un milieu ionisé (qui possède des électrons libres comme par exemple l'ionosphère) est caractérisé par une permittivité relative $\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ où ω_0 est une pulsation propre qui dépend de la densité d'électrons libres.

1/ Donner l'expression de l'amplitude du champ électrique d'une onde électromagnétique se propageant dans ce milieu dans les cas $\omega < \omega_0$ et $\omega > \omega_0$. Conclusion.

2/ Dans le cas des hautes fréquences ($\omega >> \omega_0$), montrer que la vitesse de propagation dépend de la pulsation. Calculer les valeurs des vitesses de phase et de groupe.

Exercice 7 : Une surface plane y=0 sépare l'air ($n\approx1$) d'un conducteur métallique parfait (y>0). On repère un point de l'espace par ses coordonnées cartésiennes $\left(\vec{r} = \vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right)$. Une onde électromagnétique incidente, polarisée rectilignement, se propage dans l'air, l'amplitude du champ électrique $\vec{E}_i$ vaut E_0 et son vecteur d'onde est $\vec{k}$ et sa pulsation ω. Cette onde tombe sur le métal avec un angle θ $(0<\theta<\pi/2)$ et se réfléchit. Le vecteur d'onde $\vec{k}$ est contenu dans le plan yOz.



A/ L'onde incidente est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence $\left(\vec{E}_i \perp yOz\right)$. Déterminer en fonction des données k, ω, c, θ, ε_0, et E_0:

1/ Les champs $\left(\vec{E}_i, \vec{B}_i\right)$ de l'onde incidente et les champs $\left(\vec{E}_r, \vec{B}_r\right)$ de l'onde réfléchie par le métal en tout point M(x,y,z).

2/ Les champs $\left(\vec{E}, \vec{B}\right)$ de l'onde résultante dans l'air en tout point M(x,y,z). Que deviennent ces champs au voisinage de la surface du métal?

3/ La vitesse de phase v_φ de l'onde résultante.

4/ Les surfaces d'amplitude nulle et les surfaces d'amplitude maximale pour le champ $\vec{E}$.

5/ La pression de radiation moyenne et dire comment elle varie avec θ.

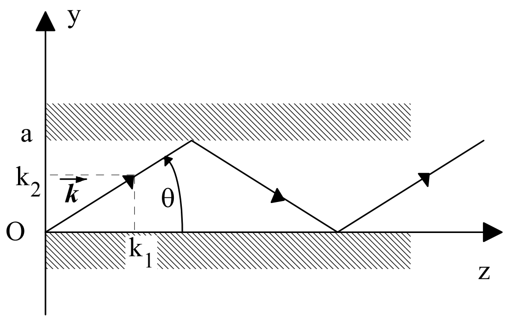
B/ L'onde est polarisée parallèlement au plan d'incidence yOz $\left(\vec{E}_i \,//\, yOz\right)$.

Répondre aux mêmes questions 1,2,3 et 5.

4/ Les surfaces d'amplitude nulle et les surfaces d'amplitude maximale pour le champ $\vec{B}$

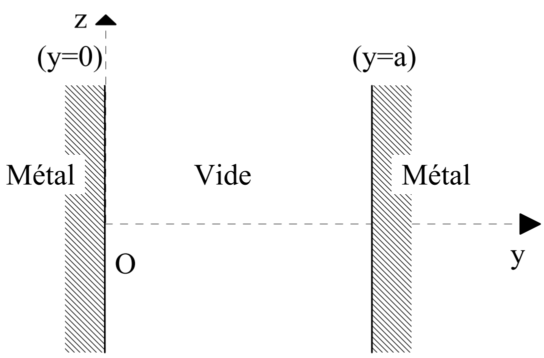
6/ Pour θ=45°, déterminer les points pour lesquels l'onde résultante est polarisée circulairement.

Exercice 8 : Une onde électromagnétique polarisée rectilignement selon Ox (perpendiculaire au plan de figure) et de pulsation ω arrive entre deux plans parfaitement conducteurs parallèles distants de a et faisant un angle θ. On étudie la propagation selon la direction Oz de ce guide (voir figure).



1/ En écrivant les conditions aux limites pour les plans y=0 et y=a, donner la condition que doit vérifier θ pour que l'onde puisse se propager entre les plans.
2/ Calculer les champs électrique et magnétique dans cet espace:
3/ En utilisant l'équation de propagation du champ électrique: $\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$, déterminer la valeur de k_1 en fonction de ω et a. Montrer que seules les ondes de pulsation supérieure à une fréquence de coupure ω_c peuvent se propager dans le guide dans la direction Oz. Comment varie l'amplitude du champ électrique si $\omega< \omega_c$?
4/ Pour le mode fondamental (n=1), déterminer la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g et déduire la relation: $v_\varphi . v_g = c^2$

Exercice 9 : Un résonateur électromagnétique est constitué par deux plans métalliques supposés conducteurs parfaits parrallèles occupant les positions y=0 et y=a. On étudie les propriétés d'une onde plane polarisée selon Oz sinusoïdale de pulsation ω dans l'espace vide entre les deux plans (voir figure).

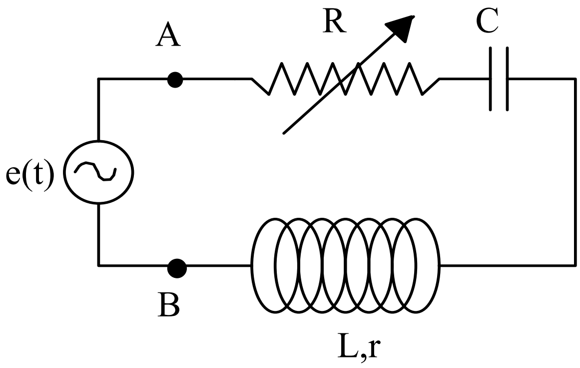


1/ Etablir l'expression du champ électrique $\vec{E}(y,t)$ entre les plans conducteurs en un point quelconque M(x,y,z). En déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}(y,t)$.
2/ Calculer les pulsations propres ω_m des ondes stationnaires dans la cavité.
A.N.: Calculer la fréquence propre f_1 la plus basse pour une distance entre les plans a=5cm.
3/ Calculer la valeur moyenne dans le temps de la densité d'énergie électromagnétique $\langle U\rangle$ dans la cavité pour les différents modes (différentes valeurs de m).
4/ Calculer la densité surfacique de courant $j_s(t)$ qui apparait sur le plan x=0 pour chaque mode, ainsi que la pression de radiation électromagnétique *p* à laquelle est soumise ce plan.
A.N.: Amplitude du champ électrique E_0 =200V/m. Calculer $\langle U\rangle$ et *p* pour m=1.

PROBLEMES

PROBLEME n°1

On considère le circuit suivant où R est une résistance variable, C est un condensateur de capacité fixe et L est une bobine d'inductance fixe et de résistance r. Le générateur de résistance interne négligeable délivre une tension sinusoidale de pulsation ω et dont la valeur efficace est 1V.



Les mesures de courant I (en valeur efficace) en fonction de ω ont donné les résultats suivants:

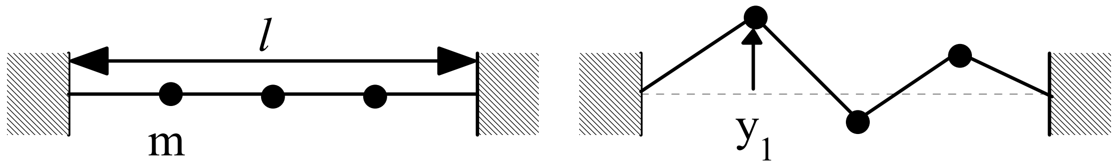
f(Hz)	160	180	200	210	220	230	240	250	270	300
R=0Ω I(mA)	1.0	1.8	4.4	7.6	7.6	5.1	3.3	2.5	1.5	1.0
R=10Ω I(mA)	1.0	1.8	4.3	7.2	7.2	4.7	3.2	2.4	1.5	1.0
R=100Ω I(mA)	1.0	1.7	3.3	4.5	4.5	3.6	2.8	2.2	1.5	1.0

1. Tracer les graphes I= I(ω) sur une même feuille. Conclusion.
2. Quelle est la valeur de la pulsation propre ω_0? Sachant que L=0.1H, calculer C.
3. Déterminer pour les trois cas, les valeurs des pulsations de coupures ω_1 et ω_2. En déduire la bande passante et le coefficient de qualité dans les trois cas.
4. A partir des différentes valeurs de l'intensité maximum I_M, déduire la valeur de la résistance r de la bobine.
5. A la résonance et pour les trois valeurs de R, calculer la puissance moyenne fournie par le générateur .

PROBLEME N°2

On considère une corde de longueur l, de masse négligeable, de tension T et horizontale. On colle sur cette corde des masses identiques m régulièrement espacées. Ces masses peuvent glisser sur un plan horizontal avec un frottement très faible. On considère les oscillations transversales des masses.

Exemple d'un système à trois masses:



masses au repos — masses en mouvement

CORDE LIBRE

1/ Corde à une masse: Montrer que la pulsation propre vaut: $\omega_0 = 2\sqrt{\dfrac{T}{ml}}$

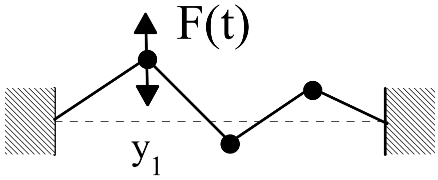
2/ Corde à deux masses: Déterminer les pulsations propres et les modes propres. Dessiner l'aspect de la corde pour chaque mode propre.

3/ Corde à trois masses: Déterminer les pulsations propres et les modes propres. Dessiner l'aspect de la corde pour chaque mode propre.

4/ Que peut-on dire lorsque le système oscille avec sa plus basse fréquence propre et avec sa plus haute fréquence propre?

CORDE EXCITEE

Corde excitée par une force



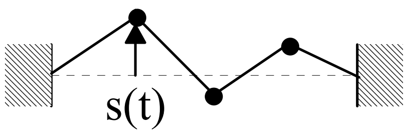
On applique une force sinusoïdale d'amplitude F_0 et de pulsation ω sur la première masse (la plus à gauche sur la figure). On suppose que l'on a atteint le régime permanent.

1/ Corde à une masse: Donner la solution $y_1(t)$ en régime permanent. Quelle est la pulsation caractéristique? Décrire le comportement à cette pulsation.

2/ Corde à deux masses: Donner les solutions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ en régime permanent. Quelles sont les pulsations caractéristiques? Décrire le comportement à ces pulsations.

3/ Mêmes questions pour une corde à trois masses.

Excitation par déplacement imposé à une masse

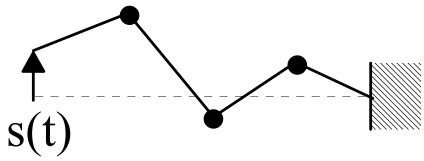


On impose un déplacement s(t) transversal sinusoîdal de pulsation ω et d'amplitude s_0 à la première masse (la plus à gauche). Pour les trois cas considérés précédement (corde à une, deux ou trois masses), déteminer les pulsations pour lesquelles on obtient un régime permanent stable. Représenter la forme des cordes dans ces cas.

Excitation par déplacement imposé à une extrémité

On impose maintenant un déplacement transversal sinusoîdal de pulsation ω et d'amplitude s_0 à l'extrémité gauche de la corde. Pour les trois cas considérés précédemment (corde à une, deux ou trois masses):

- Déterminer les déplacements $y_i(t)$ de chaque masse.



- Donner les pulsations caractéristiques
  - Représenter les formes de ces cordes à ces pulsations.

Eléments de solution

CORDE LIBRE

Pour 3 masses: $\omega_1^2 = \left(2-\sqrt{2}\right)\dfrac{4T}{ml}$; $\omega_2^2 = \dfrac{8T}{ml}$; $\omega_3^2 = \left(2+\sqrt{2}\right)\dfrac{4T}{ml}$

CORDE EXCITEE

Corde excitée par une force

Avec: $\beta = \dfrac{4T}{ml}$; $y_1 = \dfrac{\left(2\beta-\omega^2\right)^2-\beta^2}{\left(2\beta-\omega^2\right)\left(\left(2\beta-\omega^2\right)^2-2\beta^2\right)}\dfrac{F_0}{m}e^{j\omega t}$; $y_2 = \dfrac{\beta}{\left(2\beta-\omega^2\right)^2-2\beta^2}\dfrac{F_0}{m}e^{j\omega t}$; et

$$y_3 = \frac{\beta^2}{\left(2\beta-\omega^2\right)\left(\left(2\beta-\omega^2\right)^2-2\beta^2\right)}\frac{F_0}{m}e^{j\omega t}$$

Il y a résonance pour $\omega=\omega_1,\omega_2$, et ω_3. Il y a antirésonance pour $\omega^2=\beta$ et $\omega^2=3\beta$.

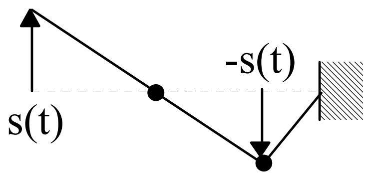
Excitation par déplacement imposé à une masse

Pour 2 masses: $s(t)=s_0e^{j\omega t}$. Le régime est stable pour: $\omega^2 = \dfrac{3T}{ml}$ et $\omega^2 = \dfrac{9T}{ml}$ qui sont les pulsations propres du système.

Excitation par déplacement imposé à une extrémité: (pour 2 masses)

$s(t)=s_0e^{j\omega t}$: $y_1 = \dfrac{\beta'\left(2\beta'-\omega^2\right)}{\left(2\beta'-\omega^2\right)^2-\beta'^2}s_0e^{j\omega t}$; $y_2 = \dfrac{\beta'^2}{\left(2\beta'-\omega^2\right)^2-\beta'^2}s_0e^{j\omega t}$ avec: $\beta' = \dfrac{3T}{ml}$

Il y a résonance pour $\omega^2=\beta'$ et $\omega^2=3\beta'$ et antirésonance pour $\omega^2=2\beta'$. A cette pulsation le mouvement des masses est: $y_1 = 0$ et $y_2 = -s(t)$. L'aspect de la corde est:

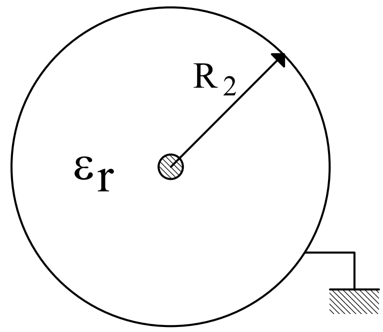


PROBLEME N°3

Lorsque nous avons étudié les circuits électriques, en régime sinusoïdal forcé, nous avons considéré que dans une branche quelconque du circuit, le courant électrique est le même en tout point et ne dépend que du temps. Cette hypothèse n'est valable que si la longueur d'onde associée au signal d'excitation (λ=c/f) est grande devant les dimensions du circuit. Par exemple pour une fréquence f=50Hz, $\lambda \approx$6000km). Cette hypothèse revient de façon équivalente à négliger le temps de propagation de l'onde électromagnétique (propagation de vitesse infinie). Si λ est du même ordre de grandeur des dimensions du circuit, cette approximation n'est plus valable (si f$\approx$GHz; $\lambda \approx$30cm compatible avec les dimensions d'un circuit ou d'un fil). Dans ce cas, il faut tenir compte de la vitesse finie des ondes électromagnétiques dans les diélectriques qui est de l'ordre de c=3 10^8 m/s.

On étudiera dans ce problème la propagation d'une onde électrique dans un câble coaxial (câble d'antenne) supposé sans perte (sans résistance) pour simplifier.

Un câble coaxial est constitué d'un conducteur central de rayon R_1 et un conducteur (cuivre tressé) de rayon R_2 et dont on peut négliger l'épaisseur ce conducteur est souvent mis à la terre (potentiel zéro). Entre les deux conducteurs est disposé un diélectrique parfait (isolant) de permittivité relative ε_r et de perméabilité relative μ_r =1.

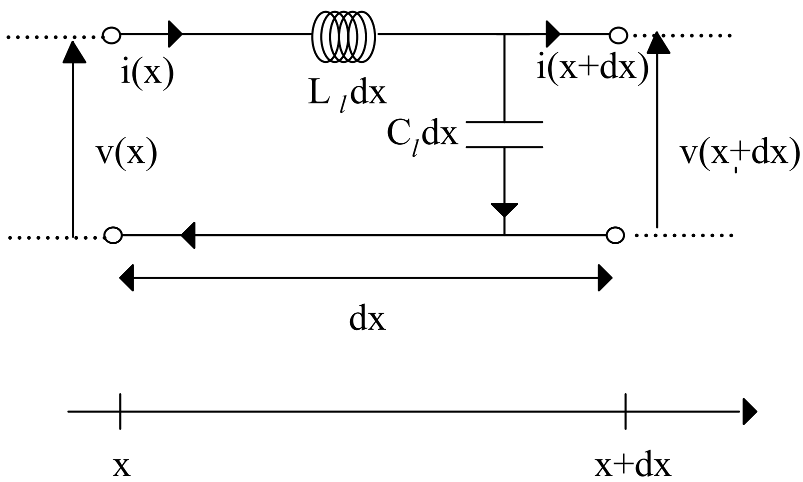


1/ Montrer, en appliquant le théorème de Gauss que la capacité par unité de longueur du câble C_l est:

$$C_l = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{ln\frac{R_2}{R_1}}$$

2/ Montrer, en appliquant le théorème d'Ampère que la self-induction par unité de longueur du câble L_l est: $L_l = \frac{\mu_0}{2\pi} ln\frac{R_2}{R_1}$

3/ Un élément du câble de longueur dx est représenté ci-contre à un instant t et à une position x.



Etablir les relations suivantes:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = -L_1\frac{\partial i}{\partial t}(x,t)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = -C_1\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)$$

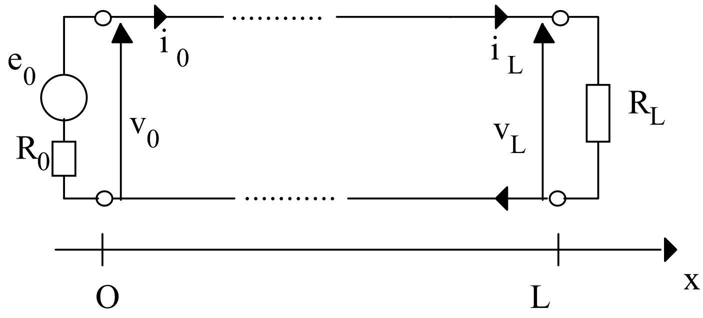
Etablir les équations de propagation de la tension v et du courant i. Déduire que la vitesse de propagation de ces ondes dans ce câble s'écrit: $V = \sqrt{\frac{1}{L_l C_l}}$

A.N.: Calculer V pour un câble coaxial dont l'isolant est constitué de polyéthylène (ε_r =2,3) et $R_2/R_1 = 10$.

4/ Montrer, pour une onde sinusoïdale se propageant dans la direction des x croissants le long d'un câble infini, que l'impédance caractéristique vaut: $R_C = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}$. La calculer pour les valeurs numériques données question 3/.

5/ On branche en un point d'abscisse x=L, une résistance R_L , montrer que le *coefficient de réflexion* r_L *en tension en x=L,* s'écrit: $r_L = \frac{R_L - R_C}{R_L + R_C}$.

6/ On branche en x=0, un générateur de f.e.m. e_0 , de résistance interne R_0 et de pulsation ω. Des ondes successives se propagent entre 0 et L où elles sont partiellement réfléchies. En prenant pour origine des phases, la phase de la f.e.m. e_0 ,montrer que le déphasage pour un aller-retour sur la ligne vaut: $\varphi = \frac{2\omega L}{V}$.



Calculer l'amplitude des différentes ondes v_1 ,v_2 ..v_i en x=L en fonction des coefficients de réflexion r_L.,r_0 en L et O et de φ
En déduire la tension v_L résultante.

7/ Quelles sont les valeurs de R_0 et R_L pour que la puissance aux bornes de R_L soit maximum.

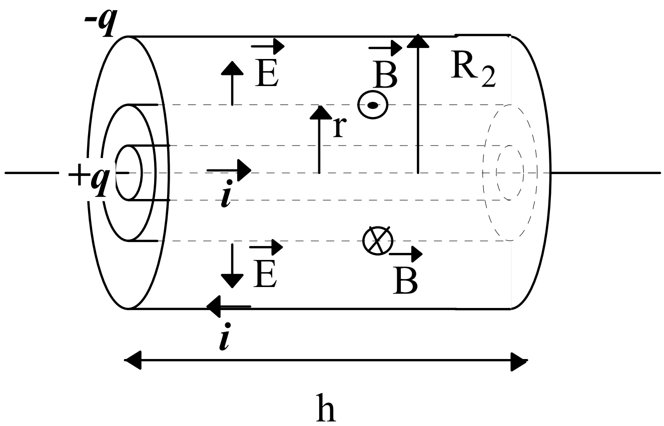
8/ Calculer le taux d'ondes stationnaires (TOS) pour $R_0 = R_L$ =50Ω.

9/ Déterminer les fréquences pour lesquelles $\varphi = 2n\pi$ et $\varphi = (2n+1)\pi$. Calculer les tensions de sorties v_L dans ces deux cas en fonction de e_0.

Eléments de réponse

1/ Les deux conducteurs sont en influence totale et portent les charges±q avec: q=ρh (ρ densité linéique de charge). Le théorème de Gauss permet d'obtenir la valeur du champ à une distance r de l'axe du câble:

$$\begin{cases} E(r) = 0 & 0 < r < R_1 \\ E(r) = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\dfrac{\lambda}{r} & R_1 < r < R_2 \\ E(r) = 0 & r > R_2 \end{cases}$$



La différence de potentiel entre les deux conducteurs vaut alors après intégration:

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} ln\frac{R_2}{R_1}$$

$= \frac{q}{h2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} ln \frac{R_2}{R_1}$; la capacité d'un élément de longueur h est alors: $C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{h2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{ln \frac{R_2}{R_1}}$ et la capacité par unité de longueur: $C_l = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{ln \frac{R_2}{R_1}}$.

2/ Le théorème d'Ampère appliqué à un cercle C de rayon r permet de calculer la circulation de $\vec{H}$ (ou $\vec{B}$). $\oint_C \vec{H}.\vec{dl} = i \Rightarrow B = \frac{\mu i}{2\pi r} \approx \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ *pour* $(R_1 < r < R_2)$. Le flux Φ du champ magnétique à travers un élément de surface du câble de longueur h vaut:

$\Phi = \iint_S \vec{B}.\vec{dS} = \int_{R_1}^{R_2} B(r)hdr = \frac{\mu_0 ih}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 ih}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$. par définition du coefficient de self-indiction L : Φ=Li, on a: $L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} ln \frac{R_2}{R_1}$ et par unité de longueur de câble: $L_l = \frac{\mu_0}{2\pi} ln \frac{R_2}{R_1}$.

3/ La relation entre tensions est: $v(x,t) = v(x+dx,t) + L_1 dx \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = -L_1 \frac{\partial i}{\partial t}(x,t)$.**[1]**

La relation entre courants est:

$v(x+dx,t) = \frac{1}{C_1 dx}\int i'\,dt$; $i' = i(x,t) - i(x+dx,t) = C_1 dx \frac{\partial v}{\partial t}(x+dx,t) \approx C_1 dx \frac{\partial v}{\partial t}(x,t)$ d'où:

$\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = -C_1 \frac{\partial v}{\partial t}(x,t)$ **[2]**

En dérivant la relation **[1]** par rapport à x et la relation **[2]** par rapport à t on obtient:

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = L_1 C_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t)$ **[3]**; de même en dérivant la relation **[1]** par rapport à t et la relation **[2]** par rapport à x on obtient: $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,t) = L_1 C_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t)$ **[4]**. Ces équations sont les équations de propagation des ondes de tension v et de courant i dont la vitesse de propagation est: $V = \sqrt{\frac{1}{L_l C_l}}$.

Pour le câble coaxial: $V = \sqrt{\frac{1}{L_l C_l}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$ qui représente la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le diélectrique.

A.N.: V=1,98 10^8m/s

4/ pour une onde progressive sinusoïdale: $v_1(x,t) = v_0 e^{j\omega(t - x/V)}$, $i_1(x,t) = i_0 e^{j\omega(t - x/V)}$:

l'équation **[1]** s'écrit: $v_1(x,t) = VL_1 i_1(x,t) = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} i_1 \Rightarrow \frac{v_1(x,t)}{i_1(x,t)} = R_C = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$.

A.N.: Pour un câble coaxial: $R_C = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} ln \frac{R_2}{R_1} = 91\Omega$.

5/ Avec une impédance terminale, il y a une onde réfléchie v_2 correspondant à une onde incidente v_1. La tension en tout point s'écrit, compte tenu de la définition de r_L:

$$v(x,t) = v_1(x,t) + v_2(x,t) = a_1 e^{j(\omega t - kx)} + a_2 e^{j(\omega t + kx)} = a_1 e^{j\omega t}\left(e^{-jkx} + r_L e^{-2jkL} e^{jkx}\right)$$

$= a_1 e^{j\omega t} e^{-jkL}\left(e^{-jk(x-L)} + r_L e^{jk(x-L)}\right)$; (k=ω/V) de même d'après l'équation **[1]**:

$$i(x,t) = a_1 e^{j\omega t} e^{-jkL} \frac{k}{L_1\omega}\left(e^{-jk(x-L)} - r_L e^{jk(x-L)}\right) = \frac{1}{R_C} a_1 e^{j\omega t} e^{-jkL}\left(e^{-jk(x-L)} - r_L e^{jk(x-L)}\right)$$

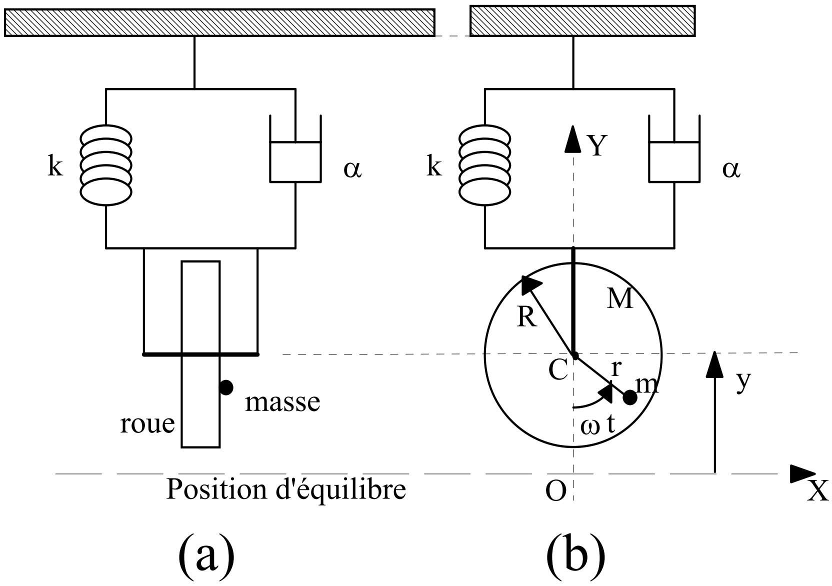
au point x=L; $v(x,t) = R_L i(x,t)$ d'où: $(1 + r_L) = \frac{R_L}{R_C}(1 - r_L) \Rightarrow r_L = \frac{R_L - R_C}{R_L + R_C}$

5/ Pour une onde de tension émise en x=0, des ondes réfléchies respectivement en x=L et x=0 vont se superposer. Une onde met un temps $\tau = 2L/V$ pour un aller-retour d'où un déphasage $\varphi = \omega\tau = 2\omega L/V$

1° Epreuve de moyenne durée   Année 94/95

Exercice 1 (sur 16 points):

Une roue cylindrique de masse M et de rayon R peut être mise en rotation autour de son axe par un moteur de masse négligeable. Sur cette roue est fixée une masse m à une distance r de l'axe C de la roue (figure a). Ce système est suspendu par un mécanisme équivalent à un ressort de coefficient de raideur k et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α (figure b). A l'équilibre, le ressort est allongé d'une distance d et la masse m est à la verticale sous C. La vitesse de rotation angulaire ω du moteur est constante. Le centre de masse du système n'etant pas confondu avec l'axe de la roue, cette dernière va osciller suivant l'axe OY. La position du centre C de la roue est repérée par y qui représente son écart par rapport à la position d'équilibre O.



1. Quelles sont dans le repère XOY, les coordonnées de la masse m à l'instant t, lorsque le moteur tourne à une vitesse angulaire ω.
2. Calculer l'énergie potentielle du système lorsque le moteur est en rotation.
3. Calculer l'énergie cinétique totale lorsque le moteur est en rotation.
4. Montrer que le lagrangien peut se mettre sous la forme:

$$L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{y}^2+r\omega m\dot{y}\sin\omega t-\frac{1}{2}ky^2+A(\omega,t)$$

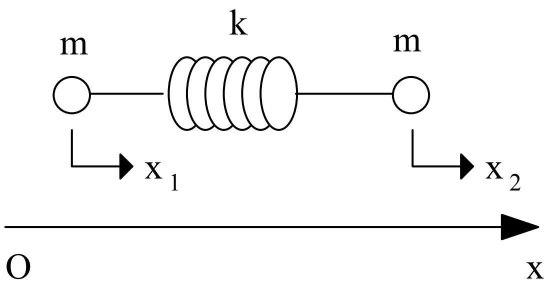
où $A(\omega,t)$ est une fonction de ω et de t, indépendante de y et $\dot{y}$. Donner l'expression de $A(\omega,t)$.

5. Déterminer l'expression de l'amplitude $y_0(\omega)$ du déplacement de la tige en régime permanent pour une vitesse angulaire ω.
6. Application numérique: M=25kg; m=250g; R=25cm; r=4cm; k=252500N/m et α=50kg/s.

L'amortissement est-il fort ou faible? Quelle est la valeur de ω pour laquelle y_0 est maximale? Calculer cette valeur maximale.

7. Pour éliminer ces vibrations quelle que soit la vitesse de rotation ω, on ajoute une masse m' à une distance r'=R. Déterminer sa position par rapport à celle de m ainsi que la valeur de m'.

Exercice2 (sur 4 points):



Une molécule diatomique est schématisée figure ci-contre. Ses deux atomes sont identiques et ne peuvent se déplacer que sur l'axe Ox horizontal. Calculer les pulsations propres. Calculer les rapports d'amplitudes de chaque mode. Décrire le mouvement des atomes dans chacun des modes.

CORRIGE

Exercice1:

1. $m\begin{cases} r\sin\omega t \\ y - r\cos\omega t \end{cases}$

2. Condition d'équilibre: $(M+m)g = kd$

   Energie potentielle totale: $V = Mgy + mg(y - r\cos\omega t) + \frac{1}{2}k(d-y)^2$

   Avec la condition d'équilibre: $V = \frac{1}{2}ky^2 - mgr\cos\omega t$

3. Energie cinétique de la roue $T_R = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{4}MR^2\omega^2$

   Vitesse de la masse m: $\mathbf{v}_m\begin{cases} r\omega\cos\omega t \\ \dot{y} + r\omega\sin\omega t \end{cases}$

   Energie cinétique de m: $T_m = \frac{1}{2}m\left(r^2\omega^2 + \dot{y}^2 + 2r\omega\dot{y}\sin\omega t\right)$

   Energie cinétique totale:

   $$T = T_R + T_m = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{4}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}m\left(r^2\omega^2 + \dot{y}^2 + 2r\omega\dot{y}\sin\omega t\right)$$

4. Le Lagrangien vaut:

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{4}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}m\left(r^2\omega^2 + \dot{y}^2 + 2r\omega\dot{y}\sin\omega t\right) - \frac{1}{2}ky^2 + mgr\cos\omega t$$

   qui s'écrit: $L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{y}^2 + r\omega m\dot{y}\sin\omega t - \frac{1}{2}ky^2 + A(\omega,t)$; avec:

   $$A(\omega,t) = \frac{\omega^2}{2}\left(mr^2 + \frac{MR^2}{2}\right) + mgr\cos\omega t$$

5. La fonction A(ω,t) n'intervient pas dans l'équation de Lagrange qui s'écrit:

   $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}} \quad \text{avec: } D = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$$

   $$(M+m)\ddot{y} + mr\omega^2\cos\omega t + ky = -\alpha\dot{y}$$

   $$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{m}{M+m}r\omega^2\cos\omega t \quad \text{avec} : \omega_0^2 = \frac{k}{M+m} \text{ et } \delta = \frac{\alpha}{2(M+m)}$$

   En notation complexe pour le régime forcé: $\cos\omega t \to e^{j\omega t}$; $y = Ye^{j\omega t}$ et $Y = y_0 e^{j\varphi}$

   L'équation de Lagrange s'écrit: $-\omega^2 y + 2j\omega\delta y + \omega_0^2 y = -\frac{m}{M+m}r\omega^2 e^{j\omega t}$

   $$y = -\frac{m}{M+m}r\omega^2 e^{j\omega t}\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 2j\omega\delta}$$ d'où l'amplitude :

   $$y_0(\omega) = \frac{m}{M+m}r\omega^2\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\delta^2}}$$

6. : $\omega_0 = 100\,s^{-1}; \delta = 1\,s^{-1} \Rightarrow \delta << \omega_0$

Mouvement faiblement amorti $\Rightarrow$ la pulsation de résonance $\omega_R \approx \omega_0$
d'où:

$$y_0^{\max} = y_0(\omega_0) = \frac{m}{M+m} r\omega_0^2 \frac{1}{2\omega_0\delta} = \frac{mr\omega_0}{2(M+m)\delta} = 0.02m = 2cm$$

7. Pour éliminer la "force" extérieure:il faut placer une masse m' diamétralement opposée et à une distance r' de l'axe telle que: mr=m'r' soit m'=40g.

Exercice2:

Le système d'équations linéaire s'écrit: $\begin{cases} (k - m\omega^2)x_1 - kx_2 = 0 \\ -kx_1 + (k - m\omega^2)x_2 = 0 \end{cases}$

L'équation séculaire s'écrit: $(k - m\omega^2)^2 = k^2 \Leftrightarrow (k - m\omega^2) = \pm k$;

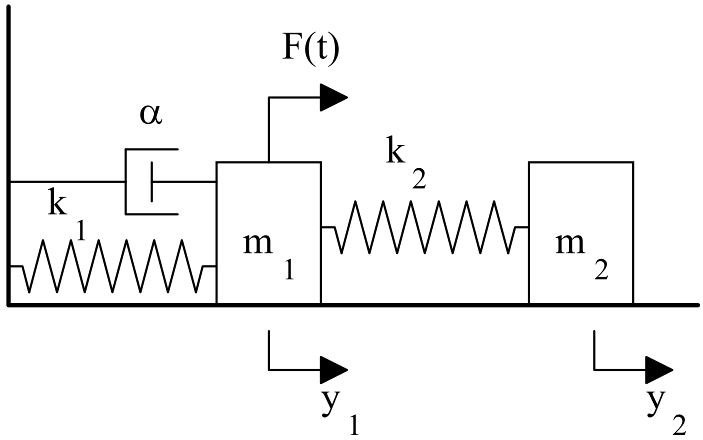
Les pulsations propres sont: $\omega_1 = 0$ et $\omega_2^2 = \dfrac{2k}{m}$

La première correspond à un mouvement de translation uniforme (accélération nulle) et $x_1=x_2$. Ce mode correspond à une translation uniforme de la molécule sans vibration.
Pour le deuxième mode $x_1=-x_2$, les deux molécules vibrent en opposition de phase et le centre de masse reste immobile.

2° Epreuve de moyenne durée   Année 94/95

Exercice 1 (sur 13 points):

On considère le système représenté sur la figure ci-contre. Sur la masse m_1 agit une force horizontale sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude F_0. Les déplacements des masses m_1 et m_2 par rapport à leurs positions d'équilibre sont respectivement $y_1(t)$ et $y_2(t)$.



Partie 1:

1/ Etablir les équations différentielles qui régissent le mouvement du système.

2/ En utilisant les notations complexes, déduire les équations algébriques satisfaites par $\dot{y}_1(t)$ et $\dot{y}_2(t)$ en régime sinusoïdal permanent.

3/ En calculant le rapport $\dot{y}_1(t) / \dot{y}_2(t)$, montrer que le mouvement des masses m_1 et m_2 , ne peuvent être qu'en phase ou en opposition de phase. Déterminer les pulsations pour lesquelles $\dot{y}_1(t)$ et $\dot{y}_2(t)$ sont en phase.

4/ Donner le circuit électrique équivalent dans l'analogie force-tension en précisant la correspondance entre les éléments électriques et mécaniques.

Partie 2:

Pour la suite de l'exercice la pulsation de la force est: $\omega = \sqrt{k_2 / m_2}$

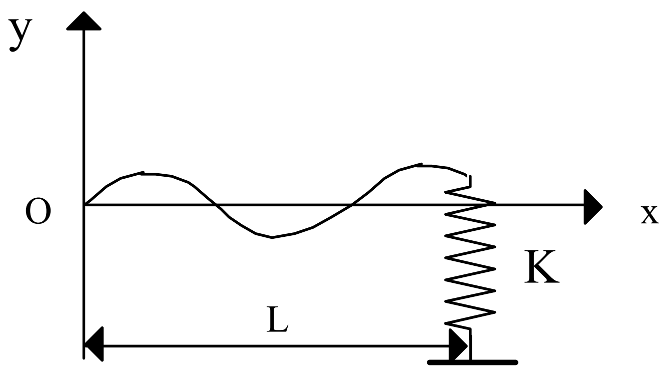
5/ En utilisant soit les équations obtenues question (2/) soit le schéma électrique équivalent, calculer $\dot{y}_1(t)$ et $\dot{y}_2(t)$.

6/ Quelle est alors l'impédance d'entrée $Z_e = F(t) / \dot{y}_1(t)$.

7/ Quelle est la force appliquée par le ressort k_2 sur la masse m_1 ?

Exercice 2 (sur 7 points):

Une corde de longueur L est tendue entre deux points situés respectivement en x=0 et x=L. Le point situé en x=0 est fixe et le point situé en x=L est relié à un ressort de raideur K. La tension de la corde est T. La corde est horizontale à l'équilibre et on



pourra négliger son poids. On étudie les ondes transverses stationnaires sinusoïdales de pulsation ω. La vitesse de propagation est V.

1/ Ecrire le déplacement y(x,t) en un point quelconque d'abscisse x et à l'instant t.

2/ En écrivant la condition limite pour x=0, montrer que y(x,t) peut se mettre sous la forme: $y(x,t) = A\, e^{j\omega t}\ \mathrm{f}(\mathrm{x})$; où f(x) est une fonction que l'on explicitera.

3/ Démontrer que pour x=L, on a la relation: $-T\dfrac{\partial y}{\partial x}(L,t) = Ky(L,t)$.

4/ Montrer que les pulsations propres doivent vérifier la condition: $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\omega L}{V}\right) = C\dfrac{\omega L}{V}$ où C est une constante que l'on précisera.

5/ Déterminer les trois premières pulsations propres ω_1 , ω_2 et ω_3 dans le cas où $\dfrac{\mathrm{T}}{\mathrm{KL}} \to \infty$.

CORRIGE

Exercice 1 (sur 13 points):

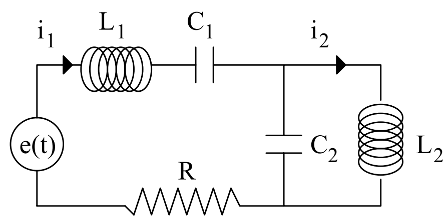
1/ $$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + \alpha\dot{y}_1 + k_1 y_1 + k_2(y_1 - y_2) = F(t) \\ m_2\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) = 0 \end{cases}$$

2/ $$\begin{cases} \left(\alpha + j\left(m_1\omega - \dfrac{k_1+k_2}{\omega}\right)\right)\dot{y}_1 + j\dfrac{k_2}{\omega}\dot{y}_2 = F(t) \\ j\left(m_2\omega - \dfrac{k_2}{\omega}\right)\dot{y}_2 + j\dfrac{k_2}{\omega}\dot{y}_1 = 0 \end{cases}$$

3/ $\dfrac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2} = 1 - \dfrac{m_2\omega^2}{k_2}$ ce rapport est réel, les deux mouvements sont en phase.ou en opposition de phase suivant le signe du rapport.

en phase si $0 < \omega < \sqrt{k_2/m_2}$

4/ $m_1 \leftrightarrow L_1$, $m_2 \leftrightarrow L_2$, $\alpha \leftrightarrow R$, $k_1 \leftrightarrow 1/C_1$, $k_2 \leftrightarrow 1/C_2$, $\dot{y}_1 \leftrightarrow i_1$, $\dot{y}_2 \leftrightarrow i_2$, $F(t) \leftrightarrow e(t)$.



5/ $$\begin{cases} \dot{y}_1 = 0 \\ \dot{y}_2 = -j\dfrac{\omega}{k_2}F(t) \end{cases}$$

6/ $\dot{y}_1 = 0 \Rightarrow Z_e = \infty$

7/ $\dot{y}_1 = 0 \Rightarrow$ somme des forces sur $m_1 = \vec{0} \Rightarrow$ action de $k_2 = -\vec{F}(t)$

Exercice 2 (sur 7 points):

1/ $y(x,t) = ae^{j\omega(t - x/V)} + be^{j\omega(t + x/V)}$

2/ $y(0,t) = 0 \Rightarrow b = -a \Rightarrow y(x,t) = -2jae^{j\omega t}\sin\left(\dfrac{\omega x}{V}\right)$

$y(x,t) = Ae^{j\omega t}\sin\left(\dfrac{\omega x}{V}\right)$ et $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \sin\left(\dfrac{\omega x}{V}\right)$

3/ Projection sur y du principe d'action et réaction entre corde et ressort:

$$F_y = -F_R \Leftrightarrow -T\frac{\partial y}{\partial x}(L,t) = -(-ky(L,t))$$

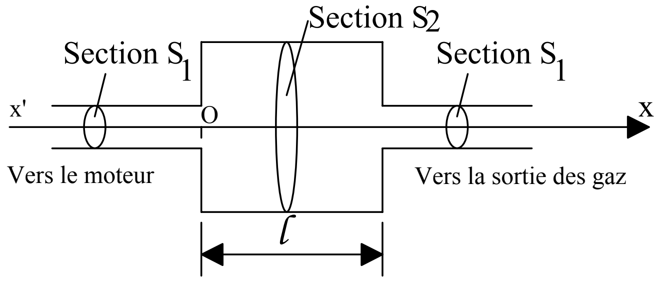
4/ $-TAe^{j\omega t}\frac{\omega}{V}\cos\left(\frac{\omega L}{V}\right) = -KAe^{j\omega t}\sin\left(\frac{\omega L}{V}\right)$ d'où: $\mathrm{tg}\left(\frac{\omega L}{V}\right) = -\frac{T}{KL}\left(\frac{\omega L}{V}\right) \Rightarrow C = -\frac{T}{KL}$

5/ pour $\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{KL}} \to \infty$: $\mathrm{tg}\left(\frac{\omega L}{V}\right) \to \infty \Rightarrow \left(\frac{\omega_n L}{V}\right) = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega_n = (2n+1)\frac{\pi V}{2L}$; n=0, 1, 2,...∞ d'où:

$$\omega_0 = \frac{\pi V}{2L};\ \omega_1 = \frac{3\pi V}{2L};\ \omega_2 = \frac{5\pi V}{2L}$$

Troisième Epreuve de Moyenne Durée (1h 30mn) 1994-95

Exercice 1 : (/ 14 points)



Dans tous les véhicules disposant d'un moteur à explosion (essence, diesel,...), les gaz de combustion sont évacués par un tuyau d'échappement. L'explosion provoquée par la combustion du mélange essence-air donne naissance à une onde de pression qui se propage à l'intérieur de ce tuyau et peut donner lieu à des bruits extrêmement désagréables. Pour limiter l'intensité de ce son, on utilise un pot d'échappement (ou "silencieux") qui est tout simplement constitué d'un tuyau de section supérieure à la section du tuyau d'échappement. On se propose ici d'étudier le fonctionnement d'un tel dispositif qui peut être modélisé par le schéma ci-dessus.

Ce système simplifié est constitué d'un tuyau de longueur semi-infinie et de section S_1, terminé en x = 0 par un second tuyau de longueur ℓ et de section $S_2 > S_1$. En $x = \ell$, ce tuyau est prolongé par un tuyau de longueur infinie et de section S_1. Ces tuyaux contiennent le même mélange gazeux de masse volumique ρ dans lequel les ondes acoustiques se propagent à la vitesse V. Les impédances acoustiques caractéristiques respectives des tuyaux de section S_1 et S_2 sont respectivement $Z_1 = \rho V/S_1$ et $Z_2 = \rho V/S_2$.

1°) L'onde acoustique issue du moteur est représentée par : $A_1\, e^{j\omega(t - x/V)}$.Expliquer pourquoi le champ de pression acoustique peut s'écrire :

$$\text{région } a\,(x \le 0):\ p_1 = A_1 e^{j\omega(t-x/V)} + B_1 e^{j\omega(t+x/V)}$$

$$\text{région } b\,(0 \le x \le l):\ p_2 = A_2 e^{j\omega(t-x/V)} + B_2 e^{j\omega(t+x/V)}$$

$$\text{région } c\,(l \le x):\ p_3 = A_3 e^{j\omega(t-x/V)}$$

Que représentent A_1, B_1, A_2, B_2 et A_3 ?

2°) Calculer, en fonction des données du 1°) et des impédances Z_1 et Z_2, les débits $d_1 = S_1 \dot{u}_1$, $d_2 = S_2 \dot{u}_2$ et $d_3 = S_1 \dot{u}_3$ correspondant respectivement aux régions a, b et c. $\dot{u}_1$, $\dot{u}_2$ et $\dot{u}_3$ représentent la vitesse de particules dans chacune de ces régions.

3°) Ecrire les relations de continuité (débit et pression) en x = 0 et en déduire l'expression de A_1 en fonction de A_2 et B_2 .

4°) Ecrire les relations de continuité (débit et pression) en $x = \ell$ et en déduire l'expression de A_2 et B_2 en fonction de A_3 .

5°) Montrer que dans le cas où $S_2 = 4\, S_1$, le coefficient de transmission en intensité acoustique défini par $\alpha_t = |A_3/A_1|^2$ peut se mettre sous la forme :

$$\alpha_t = \frac{1}{1+\beta \sin^2\left(\dfrac{\omega \ell}{V}\right)}$$

où β est une constante positive dont on précisera la valeur.

6°) ω et V étant données, pour quelles valeurs de la longueur ℓ le coefficient α_t est minimal? Calculer cette valeur minimale et conclure.

Exercice 2 : (/ 6 points)

Une onde électromagnétique plane sinusoïdale et linéairement polarisée, correspondant à de la lumière de longueur d'onde $\lambda = 5.0\ 10^{-7}$ m se propage dans le vide. Son intensité (puissance moyenne par unité de surface) est $I = 0.1\ W.m^{-2}$. Sa direction de propagation se trouve dans le plan xOy et fait un angle $\alpha = 30°$ avec l'axe Ox. La direction de polarisation (champ $\vec{E}$) est contenue dans le plan xOy.

1°) Ecrire les expressions littérales et numériques du champ électrique $\vec{E}$,du champ magnétique $\vec{B}$ et du vecteur de Poynting. Faire un dessin représentant la structure de cette onde électromagnétique.

2°) Calculer la puissance moyenne reçue par un cadre carré de 1cm de côté perpendiculaire à la direction de propagation.

N.B. On donne la vitesse de propagation de la lumière dans le vide $c = 3\ 10^8\ m.s^{-1}$ ainsi que l'impédance caractéristique du vide $Z_0 = 377\ \Omega$.

CORRIGE

Exercice 1

1. Région a: Supperposition de l'onde émise par le moteur plus celle réfléchie par les parties b et c.

   Région b: Premier terme :superposition des ondes se propageant dans le sens des x croissants. Deuxième terme: superposition des ondes se propageant dans le sens des x décroissants.

   Région c: Onde transmise dans le dernier tuyau et se propageant dans le sens des x croissants.

   A_1, B_1, A_2, B_2, et A_3 sont les amplitudes complexes de ces différentes ondes.

2. $$d_1 = \frac{1}{Z_1}\left(A_1 e^{j\omega\left(t - x/V\right)} - B_1 e^{j\omega\left(t + x/V\right)}\right)$$

   $$d_2 = \frac{1}{Z_2}\left(A_2 e^{j\omega\left(t - x/V\right)} - B_2 e^{j\omega\left(t + x/V\right)}\right)$$

   $$d_3 = \frac{1}{Z_1}\left(A_3 e^{j\omega\left(t - x/V\right)}\right)$$

3. $$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ \dfrac{1}{Z_1}\left(A_1 - B_1\right) = \dfrac{1}{Z_2}\left(A_2 - B_2\right) \end{cases} \Rightarrow A_1 = \frac{A_2}{2}\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) + \frac{B_2}{2}\left(1 - \frac{Z_1}{Z_2}\right)$$

4. $$\begin{cases} A_2 e^{-j\frac{\omega l}{V}} + B_2 e^{+j\frac{\omega l}{V}} = A_3 e^{-j\frac{\omega l}{V}} \\ \dfrac{1}{Z_2}\left(A_2 e^{-j\frac{\omega l}{V}} - B_2 e^{+j\frac{\omega l}{V}}\right) = \dfrac{1}{Z_1}\left(A_3 e^{-j\frac{\omega l}{V}}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = \dfrac{A_3}{2}\left(1 + \dfrac{Z_2}{Z_1}\right) \\ B_2 = \dfrac{A_3}{2}\left(1 - \dfrac{Z_2}{Z_1}\right) e^{-2j\frac{\omega l}{V}} \end{cases}$$

5. $S_2/S_1=4 \Rightarrow A_1 = \frac{5A_2}{2} - \frac{3B_2}{2}$; $A_2 = \frac{5A_3}{8}$ et $B_2 = \frac{3A_3}{8} e^{-2j\frac{\omega l}{V}}$

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{16}{25 - 9e^{-2j\frac{\omega l}{V}}} = \frac{16e^{+j\frac{\omega l}{V}}}{25e^{+j\frac{\omega l}{V}} - 9e^{-j\frac{\omega l}{V}}} = \frac{16e^{+j\frac{\omega l}{V}}}{16\cos\left(\frac{\omega l}{V}\right) - 34j\sin\left(\frac{\omega l}{V}\right)}$$

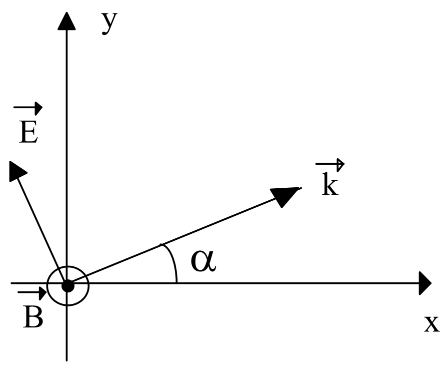
$$\left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\omega l}{V}\right) + \left(\frac{17}{8}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega l}{V}\right)} = \frac{1}{1 + \beta \sin^2\left(\frac{\omega l}{V}\right)}; \beta = 3.515$$

6. α_t minimum pour $\sin^2\left(\frac{\omega l}{V}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\omega l}{V} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$. La valeur $(\alpha_t)_{\min} = \frac{1}{1+3.515} = 0.221$

L'intensité sonore a été atténuée d'un facteur important d'où le nom de "silencieux".

Exercice 2

1. $I = \frac{E_0^2}{2Z_0} \Rightarrow E_0 = 8.68 \, V/m$; $B_0 = \frac{E_0}{c} = 2.9 \; 10^{-8} T$



$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 3.77 \; 10^{15} Hz$; $k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\sqrt{3}}{2} = 1.09 \; 10^7 m^{-1}$;

$k_y = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{1}{2} = 6.3 \; 10^6 m^{-1}$

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = -\frac{E_0}{2} \exp j(\omega t - k_x x - k_y y) \\ E_y = \frac{\sqrt{3}E_0}{2} \exp j(\omega t - k_x x - k_y y) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

$$\text{et } \vec{B} = \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = 0 \\ B_z = B_0 \exp j(\omega t - k_x x - k_y y) \end{cases}$$

$$\vec{R} = \vec{E} \times \vec{H} \Rightarrow \vec{R} = \begin{cases} R_x = E_y B_z \frac{c}{Z_0} = 0.173 \cos^2(\omega t - k_x x - k_y y) \\ R_y = -E_x B_z \frac{c}{Z_0} = 0.10 \cos^2(\omega t - k_x x - k_y y) \text{ (en W/m}^2\text{)} \\ R_z = 0 \end{cases}$$

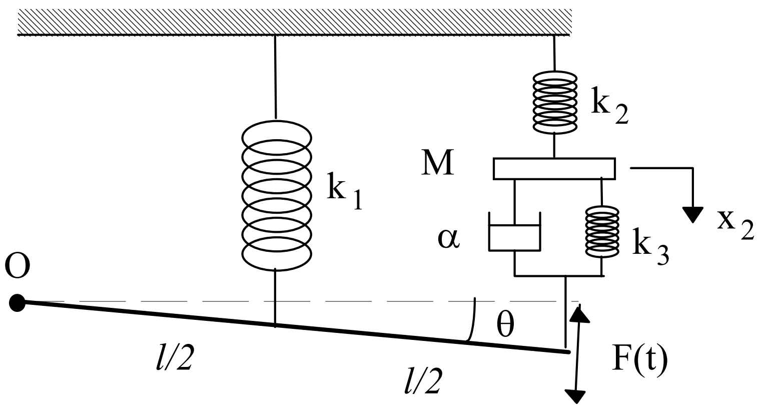
On vérifie que: $\left|\overline{\vec{R}}\right| = I$

2. $\overline{P} = Is = 10^{-5} W$

EPREUVE DE SYNTHESE (DUREE 2h) Année 94/95

Exercice 1 (sur 9 pts)

Sur la figure ci-contre, la masse M est reliée à un bâti par un ressort de raideur k_2. La barre homogène de masse m et de longueur l oscille autour d'un point fixe O dans le plan de la figure. Elle est reliée au bâti, en son milieu par un ressort de raideur k_1, et elle est couplée à la masse M par un ressort de raideur k_3 et un amortisseur de coefficient α.



Par ailleurs, elle est soumise à une force F(t) perpendiculaire à la barre sinusoidale, d'amplitude F_0 et de pulsation ω. En considérant les oscillations de faibles amplitudes et sachant qu'à l'équilibre la barre est horizontale:

1/ Déterminer le Lagrangien du système.

2/ Déterminer les équations différentielles du mouvement en $x_1(t)=l\theta(t)$ et $x_2(t)$.

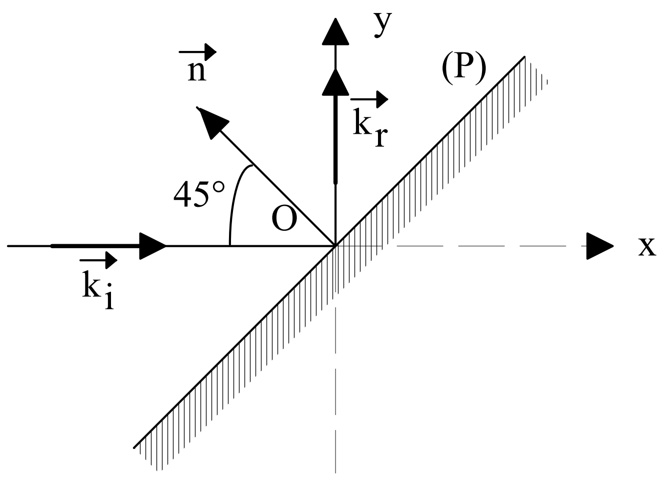
3/ En déduire le schéma électrique équivalent dans l'analogie Force-Tension (On précisera l'équivalence entre les différents éléments).

4/ Calculer l'impédance d'entrée $Z_e = \dfrac{F(t)}{\dot{x}_1(t)}$ du système mécanique dans le cas où $\omega^2 = \dfrac{k_2}{M}$

5/ Déterminer les vitesses $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$ à cette pulsation. Décrire le comportement du système dans ce cas.

Exercice 2 (sur 11 pts)

Une onde acoustique plane de pulsation ω se propage à la vitesse V dans un fluide parfait de densité ρ. La direction de propagation correspond à la direction Ox. L'amplitude de l'onde de pression acoustique est p_0. Cette onde rencontre un plan (P) parfaitement rigide et parfaitement réfléchissant faisant un angle de 45° avec la direction de propagation de l'onde incidente. L'onde réfléchie se propage donc dans la direction Oy (voir figure ci-contre). Les vecteurs $\vec{n}, \vec{k}_i$ et $\vec{k}_r$ représentent respectivement la normale au plan (P), le vecteur d'onde de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. p'_0 est l'amplitude de l'onde de pression réfléchie.



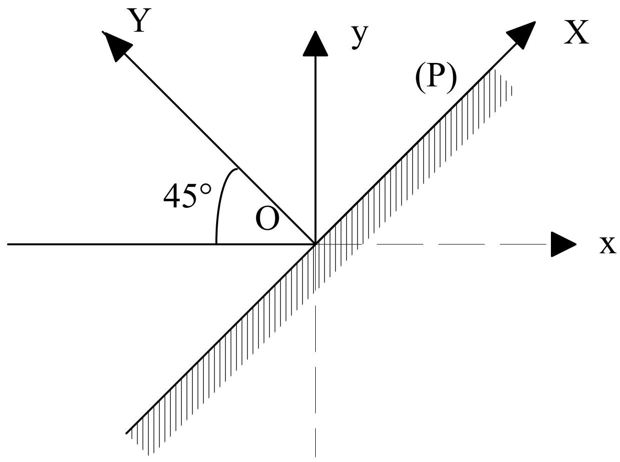
1/ Donner l'expression des ondes de pression incidente et réfléchie.

2/ Donner l'expression des ondes de vitesses de particules, incidente et réfléchie. Calculer les projections normales au plan (P) (selon $\vec{n}$) de ces vitesses.

3/ Expliquer pourquoi la résultante des vitesses normales doit être nulle sur le plan (P) d'équation y=x.

4/ A partir de cette condition sur le plan (P), déterminer la pression acoustique totale $p_T(x,y,t)$ en tout point du milieu fluide.

5/ En effectuant le changement de variables $x = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ et $y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$, où X et Y sont les coordonnées représentées sur la figure ci-contre.



a/ Donner l'expression de la pression totale

b/ Déterminer l'amplitude de la pression acoustique totale sur le plan (P). Déterminer les positions pour lesquelles la pression acoustique totale est nulle. Les représenter schématiquement.

c/ Quelle est la direction de propagation de l'onde totale $p_T(X,Y,t)$? Quelle est la vitesse de propagation de cette onde?

CORRIGE

Exercice 1

$$p_i(x,t) = p_0 \exp j\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)$$

$$p_r(y,t) = p'_0 \exp j\omega\left(t - \frac{y}{V}\right)$$

2/ $$\begin{cases} \dot{\vec{u}}_i(x,t) = \frac{p_0}{\rho V} \exp j\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\vec{e}_x \\ \dot{\vec{u}}_r(x,t) = \frac{p'_0}{\rho V} \exp j\omega\left(t - \frac{y}{V}\right)\vec{e}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u}_{in}(x,t) = -\frac{p_0}{\sqrt{2}\rho V} \exp j\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) \\ \dot{u}_{rn}(y,t) = \frac{p'_0}{\sqrt{2}\rho V} \exp j\omega\left(t - \frac{y}{V}\right) \end{cases}$$

3/ Le plan y=x étant rigide $\Rightarrow \dot{u}_{Tn}(x,y,t) = 0$ pour y=x

4/ $$\dot{u}_{Tn}(x,y,t) = -\frac{p_0}{\sqrt{2}\rho V} \exp j\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) + \frac{p'_0}{\sqrt{2}\rho V} \exp j\omega\left(t - \frac{y}{V}\right)$$

$$\dot{u}_{Tn}(x,y,t)=\frac{\exp j\omega t}{\sqrt{2}\rho V}\left(p'_0\exp\left(-j\frac{\omega y}{V}\right)-p_0\exp\left(-j\frac{\omega x}{V}\right)\right)$$ sur le plan (P) x=y

$$\dot{u}_{Tn}(P,t)=\frac{\exp j\omega t}{\sqrt{2}\rho V}\exp\left(-j\frac{\omega x}{V}\right)(p'_0-p_0)=0\Rightarrow p'_0=p_0$$

$$p_T(x,y,t)=p_0\exp j\omega t\left(\exp\left(-j\frac{\omega y}{V}\right)+\exp\left(-j\frac{\omega x}{V}\right)\right)$$

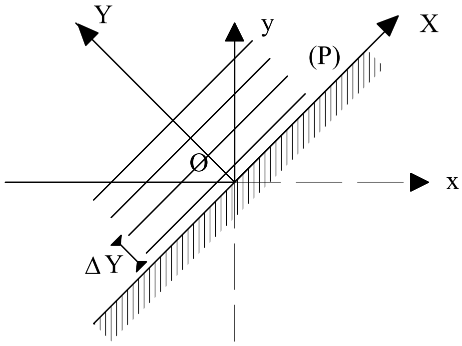
5/ a/ $p_T(x,y,t)=2p_0\exp j\omega\left(t-\frac{\omega X}{\sqrt{2}V}\right)\cos\left(\frac{\omega Y}{\sqrt{2}V}\right)$

b/sur (P):Y=0 $\Rightarrow\left|p_T(P,t)\right|=2p_0$

$$p_T(x,y,t)=0\Rightarrow\cos\left(\frac{\omega Y}{\sqrt{2}V}\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{\omega Y_n}{\sqrt{2}V}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow Y_n=\frac{\sqrt{2}V}{\omega}(2n+1)\frac{\pi}{2}$$



pour n=0,1...famille de plans parralleles à (P) distants de

$$\Delta Y=\frac{\sqrt{2}V}{\omega}\pi$$

c/ Onde qui se propage selon OX

Vitesse de propagation $V'=\sqrt{2}V$

Epreuve de Synthèse - Juin 1998 (Durée 2h)

Exercice (/ 6 points)

1. On considère le champ électrique $\vec{E}$, dans le vide, défini par ses coordonnées dans un repère cartésien Oxyz :

$$E_x = 0 \; ; \qquad E_y = E_0 \cos\frac{\pi y}{a} \exp[j(\omega t - kz)] \; ; \qquad E_z = \alpha E_0 \sin\frac{\pi y}{a} \exp[j(\omega t - kz)]$$

E_0 est réel et α peut être complexe. Quelles relations doivent vérifier α, k, a d'une part et a, k, ω et c d'autre part pour que $\vec{E}$ soit le champ électrique d'une onde électromagnétique dans le vide? Quelle est alors l'expression de la vitesse de phase V_ϕ en fonction de α? (c est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide).

2. **a.** Dans quels plans le champ électrique est-il polarisé transversalement?
b. Dans quels plans le champ électrique est-il polarisé longitudinalement?

3. Montrer qu'une telle onde satisfait aux conditions aux limites si l'espace est limité par deux plans conducteurs parfaits, parallèles à xOz et situés en y_1=pa et y_2=-pa (p entier).

Problème (/ 14 points)

Première partie :

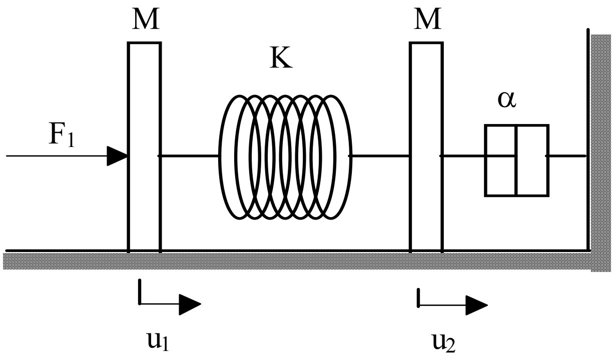


Figure 1

On considère le système à deux degrés de liberté représenté par la figure 1. Il est constitué par deux masses identiques M reliées par un ressort de raideur K. La seconde masse est reliée à un bâti fixe par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α, tandis que la première masse est soumise à une force sinusoïdale F_1 de pulsation ω. Les deux masses glissent sans frottement sur le plan horizontal. u_1 et u_2 représentent les positions respectives de chacune des masses par rapport à l'équilibre.

I.1. Etablir les équations différentielles du mouvement pour les coordonnées u_1 et u_2.

I.2. Dans le cas où α est négligeable devant $M\omega - \dfrac{K}{\omega}$, calculer en régime permanent sinusoïdal l'amplitude complexe $\overline{V}_2$ de la vitesse de la seconde masse en fonction de l'amplitude de F_1.

I.3. En déduire l'amplitude complexe $\overline{F}_2$ de la force transmise à l'amortisseur.

I.4. Calculer le coefficient de transmission $\beta = \left|\dfrac{\overline{F}_2}{\overline{F}_1}\right|$.

I.5. Si $\omega >> \sqrt{\frac{K}{M}}$, montrer que le coefficient de transmission β s'écrit sous la forme : $\beta = \frac{a}{M^2\omega^3}$; donner l'expression de a en fonction de α et K.

Deuxième partie :

Le système décrit ci-dessus symbolise un dispositif d'isolation acoustique par une double paroi. Un tel dispositif peut être représenté par deux masses rigides M, de section S, séparées, à l'équilibre, par une distance e (figure 2.a). On suppose qu'à l'équilibre, la pression est égale à P_0 dans chacune des trois régions La première masse M se met en mouvement lorsqu'elle est soumise à l'action d'une onde de pression. Ce mouvement entraîne la compression de l'air compris entre les deux masses, ce qui met en mouvement la seconde masse. Une partie de l'onde acoustique est ainsi transmise vers la droite.. Lorsque une onde acoustique arrive de la gauche vers la droite, la pression acoustique résultante dans le milieu de gauche est égale à p_1, la pression acoustique transmise est égale à p_2; la pression acoustique entre les deux parois est supposée uniforme et est notée p (figure 2b). On supposera que la succession de compressions et de détentes de la tranche de fluide limitée par les deux masses, est un processus adiabatique. ρ est la masse volumique de l'air et C la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans l'air

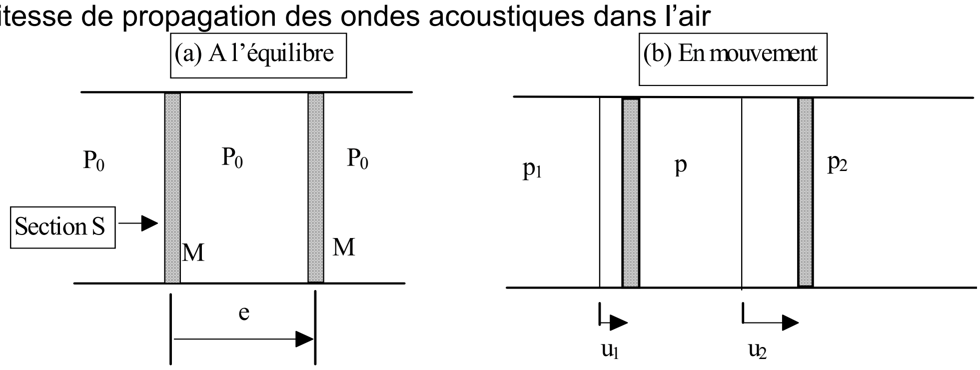


Figure 2

II.1. Si l'onde acoustique incidente de pulsation ω, est supposée progressive harmonique et plane, quelle est la nature de l'onde acoustique transmise au troisième milieu supposé infini? Montrer qu'en chaque point de ce milieu l'impédance acoustique est réelle. Préciser la valeur de cette impédance.

II.2. Calculer le volume v_0 de la tranche de fluide limitée par les deux masses, à l'équilibre. Calculer le volume v occupé par cette tranche de fluide en fonction de u_1 et u_2, lorsqu'elle est en mouvement. En déduire la dilatation volumique $\theta = \frac{v - v_0}{v_0}$.

II.3. Sachant que $p = -\gamma P_0 \theta$, montrer que la force exercée par le fluide intermédiaire sur chacune des masses M s'écrit $F = -K(u_2 - u_1)$. Donner l'expression de K en fonction de P_0 , S , e et de γ qui représente le rapport des chaleurs spécifiques de l'air.

II.4. Montrer alors que la figure 2.b. est équivalente à la configuration donnée par la figure 1. Donner l'expression de $F_1=F_1(p_1,S)$, de $K=K(\gamma,P_0,S,e)$ et de $\alpha=\alpha(\rho,C,S)$.

II.5. En tenant compte des résultats de la première partie, calculer le coefficient de transmission en pression $\beta = \left|\frac{P_2}{P_1}\right|$ où P_2 représente l'amplitude de la pression transmise par la paroi.

II.6. Application numérique : On donne les valeurs numériques suivantes :

$P_0=10^5$ Pa, $\rho=1.21$ kg/m^3, C=340 m/s, $\gamma=1.4$, M= 10kg , S=4 m^2, e=0.2m, f=1000 Hz et 5000 Hz.

a. Pour chacune de ces fréquences, comparer α et $M\omega$, puis comparer ω et $\sqrt{\frac{K}{M}}$. Les approximations faites plus haut sont-elles valables ?

b. Calculer β pour chacune de ces fréquences. Conclusion.

Corrigé

Exercice (/6 points)

1. $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{a}+jk\alpha=0$

$\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\vec{E}=0 \quad \Rightarrow \quad k^2=\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\pi^2}{a^2}$

$V_\phi = c\sqrt{1-\alpha^2}$

2. Polarisation transversale dans les plans : $y = na$

Polarisation longitudinale dans les plans : $y=(2n+1)\frac{a}{2}$

3. Continuité de la composante E_y en $y=\pm a$

Problème (/14 points)

Première partie :

I.1. $\begin{cases} M\ddot{u}_1+Ku_1-Ku_2=F_1 \\ -Ku_1+M\ddot{u}_2+\alpha\dot{u}_2+Ku_2=0 \end{cases}$

I.2. $\overline{V}_2=\dfrac{jKF_1}{M^2\omega\left(\frac{2K}{M}-\omega^2\right)}$

I.3. $\overline{F}_2=\dfrac{j\alpha KF_1}{M^2\omega\left(\frac{2K}{M}-\omega^2\right)}$

I.4. $\beta=\dfrac{\alpha K}{M^2\omega\left|\frac{2K}{M}-\omega^2\right|}$

I.5. $\beta=\dfrac{\alpha K}{M^2\omega^3} \quad \Rightarrow \quad a=\alpha K$

Deuxième partie :

II.1. L'onde acoustique transmise est une onde progressive, plane harmonique.

$\rho\frac{\partial\dot{u}}{\partial t}=-\frac{\partial p_2}{\partial x} \quad \Rightarrow Z=\frac{p_2}{\dot{u}}=\rho C \text{ (réel)} \qquad [x\text{: direction de propagation}]$

II.2. $v_0 = Se$

$v=v_0\left[1+\frac{u_2-u_1}{e}\right]$

$\theta=\frac{u_2-u_1}{e}$

II.3. $F=pS=-\frac{\gamma P_0 S}{e}\left(u_2-u_1\right) \quad \Rightarrow \quad K=\frac{\gamma P_0 S}{e}$

II.4. $F_1=p_1S$

$$K = \frac{\gamma P_0 S}{e}$$

$$\alpha = \rho C S$$

II.5. $$\beta = \frac{\rho C \gamma P_0 S^2}{e M^2 \omega^3}$$

II.6.

f=1000 Hz	ω=6280 rad/s	Mω=62800 kg/s	α=1646 kg/s	$\sqrt{K/M}$=529 rad/s	β=1.9 10^{-4}
f=5000 Hz	ω=31400 rad/s	Mω=314000 kg/s	α=1646 kg/s	$\sqrt{K/M}$=529 rad/s	β=1.5 10^{-6}