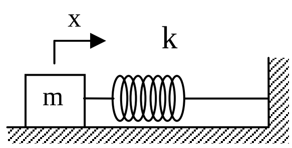
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène 2007-2008

Faculté de Physique LMD- Filère SM – L2 – S3 : Module **Vibrations et Ondes**

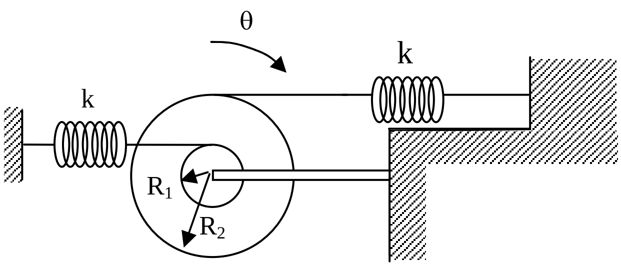
Premier semestre 2007-2008 Epreuve de synthèse Durée : 1h30mn

Exercice 1 : (/10 points)

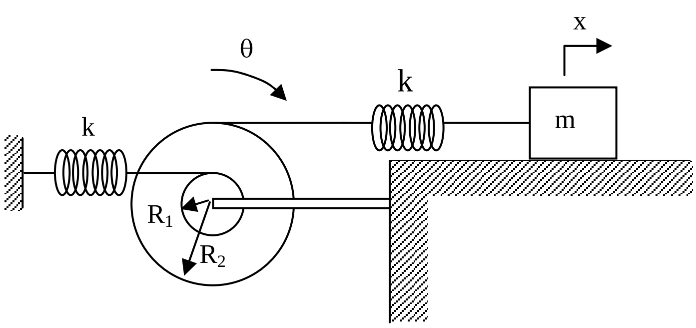
1°) Dans le système ci-contre, la masse m est reliée à un bâti fixe par un ressort de raideur k et glisse sans frottement sur un plan horizontal. Calculer la pulsation propre Ω_1 des oscillations de ce système en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.



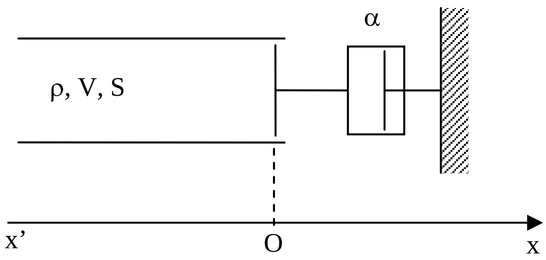
2°) La poulie du système ci-dessous est constituée de deux disques homogènes de même masse m et de rayons respectifs R_1 et R_2. Cette poulie tourne sans frottement autour d'un axe fixe. A l'équilibre $\theta=0$, les deux ressorts de raideur k ne sont pas déformés. Calculer la pulsation propre Ω_2 des oscillations de ce système en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.



3°) Etablir les équations différentielles du mouvement pour le système à deux degrés de liberté ci-dessous, constitué des éléments du système de la question précédente à laquelle a été rajoutée la masse m qui peut glisser sans frottement sur le plan horizontal. Sachant que $R_2=2R_1$, calculer les pulsations propres de ce système en fonction de la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.



Exercice 2 : (/10 points)



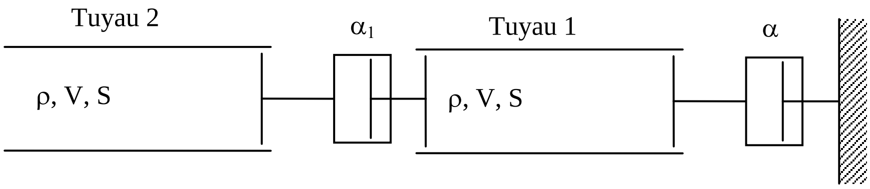
On considère un tuyau de section constante S contenant un fluide de masse volumique ρ dans lequel les ondes acoustiques se propagent à la vitesse V. Ce tuyau est terminé en x = 0 par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. Une onde acoustique incidente arrive de la gauche et se propage dans le tuyau dans le sens des x croissants. Cette onde correspond à une pression acoustique donnée par: $p_i(x,t) = P_i\, e^{i(\omega t - kx)}$ où k représente le module du vecteur d'onde.

1°) Ecrire l'expression de la pression résultante p(x,t), en chaque point du tuyau, en fonction de P_i, ω, k ,x et du coefficient de réflexion R en x=0.

1°) Calculer la force exercée par l'onde acoustique résultante sur l'amortisseur et en déduire le coefficient de réflexion R en pression en x = 0, en fonction de ρ, V, S et α.

3°) Calculer l'impédance acoustique en un point $Z(x) = \frac{p}{\dot{u}}$ en fonction de ρ, V, x et R. Quelle est la valeur de Z(x) lorsque le coefficient de réflexion R est nul ? Dans ce cas, exprimer α en fonction de ρ, V et S.

4°) Ce tuyau (noté Tuyau 1) est relié, par l'intermédiaire d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α_1, à un second tuyau (noté Tuyau 2) identique et contenant le même fluide sous les mêmes conditions de température et de pression (figure ci-dessous).



Une onde incidente se propage de la gauche vers la droite dans le tuyau 2, elle est transmise dans le tuyau 1 qui est alors parcouru uniquement par une onde progressive. Montrer que cette configuration est équivalente au tuyau 2 terminé à droite par un amortisseur dont le coefficient de frottement visqueux est $\alpha_T = \frac{\beta\alpha}{\beta+\alpha}$. Donner l'expression de β en fonction de α_1.

5°) Calculer le coefficient de réflexion en pression à l'extrémité du tuyau 2 en fonction de β et α .

6°) En déduire, en fonction de α, la valeur de α_1 qui permet d'avoir, à l'extrémité du tuyau 2, un coefficient de réflexion dont le module égal à ½.

Faculté de Physique U.S.T.H.B. **$2^{ème}$ Année LMD (Licence de Chimie)**

(2007/2008) **Physique 3**

Epreuve semestrielle de moyenne durée (Durée : 1h 30 mn).

L'exercice 1 est obligatoire et les exercices 2 et 3 sont au choix.

<u>Exercice 1 (12 pts) :</u>

Le système mécanique représenté sur la **figure 1** est constitué d'une masse m fixée à l'extrémité d'une tige de masse négligeable et de longueur **3a**. Cette tige peut osciller sans frottement, dans un plan vertical, autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan du mouvement en O.

Deux amortisseurs de coefficient de frottement visqueux $\alpha/2$ relient le point A **(OA = 2a)** de la tige aux bâtis fixes B_1 et B_2. Deux ressorts identiques de constante de raideur K/2, placés horizontalement, relient le point B **(OB = a)** de la tige aux bâtis fixes B_1 et B_2. On repérera la position de la masse par l'angle θ que fait la tige avec la verticale. A l'équilibre la tige est en position verticale. On considérera uniquement les mouvements de faible amplitude.

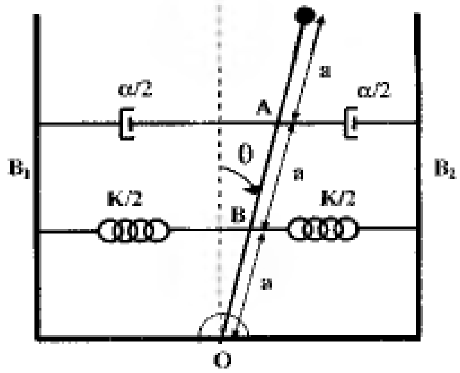


Figure 1

1/ Déterminer la condition d'oscillation autour de la position d'équilibre ($\theta = 0$).

2/ Cette condition étant satisfaite, déterminer l'équation du mouvement du système.

3/ Lorsque la tige est écartée de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_o = \dfrac{\pi}{60}$, puis lâchée sans vitesse initiale, elle prend un mouvement oscillatoire amorti de pseudo-période $T_a = 0{,}126$ s. On constate qu'au bout de 40 pseudo-périodes l'élongation des oscillations atteint 80 % de l'élongation initiale. Calculer la valeur du coefficient d'amortissement et en déduire les valeurs de α et K. Sachant que m = 100 g et a = 10 cm.

4/ On applique un moment à la tige $\mathcal{M}(t) = \mathcal{M}_o \cos(\omega t)$.

a) Ecrire l'équation de mouvement du système.

b) Déduire la solution en régime permanent $\theta_p(t)$.

c) Donner la pulsation de résonance et déduire l'amplitude à cette pulsation.

<u>Exercice 2 (8 pts):</u>

Deux oscillateurs identiques de masse m = 1kg et de constante de raideur K= 10N/m sont couplés par un ressort de même constante de K = 10 N/m.

$x_1(t)$ et $x_2(t)$ représentent les déplacements des deux masses par rapport à leur position d'équilibre **(Figure 2)**.

1/ Etablir les équations du mouvement

2/ Déterminer les pulsations propres du système et les rapports d'amplitude des deux modes.

3/ Donner les expressions des solutions pour $x_1(0) = x_o$, $x_2(0) = -x_o$ et $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ m/s décrire le mouvement de chaque masse.

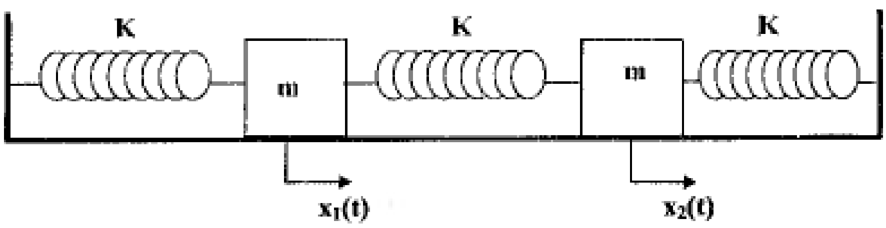


Figure 2

Exercice 3 (8 pts):

Une corde légère de longueur L et de masse linéique μ_1 est tendue horizontalement à l'aide de la tension F. Son extrémité $x = L$ est fixée à une masse m qui est reliée à un bâti fixe par un ressort de constante de raideur K (**figure 3.a**).

On supposera que cette corde est le siège d'ondes transversales, harmoniques, de pulsation ω et de faible amplitude.

1/ Déterminer l'impédance en $x = 0$.

2/ On accole bout à bout l'extrémité $x = 0$ de la corde 1 de longueur L et de masse linéique μ_1 à une corde 2 de même longueur L et de masse linéique μ_2. A l'équilibre la tension F est supposée la même dans les deux cordes. L'extrémité de la corde 2 $(x = -L)$ est soumise à une vibration transversale : $u(t) = u_0\, e^{j\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\right)t}$ (**figure 3.b**).

a) Déduire l'expression du coefficient de réflexion R en $x = 0$.

b) Déterminer les amplitudes complexes des ondes incidente et réfléchie le long de la corde 2 en fonction de R, u_0, K, m, μ_1, μ_2, L et F.

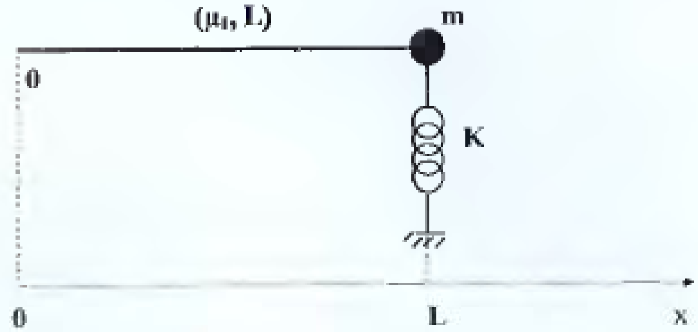


Figure 3.a

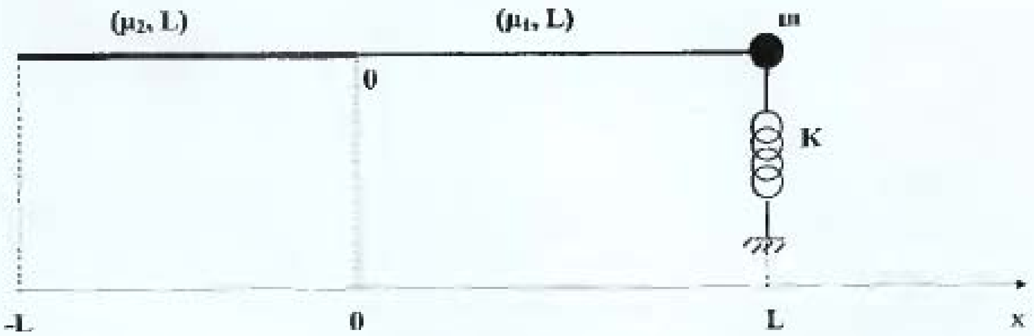


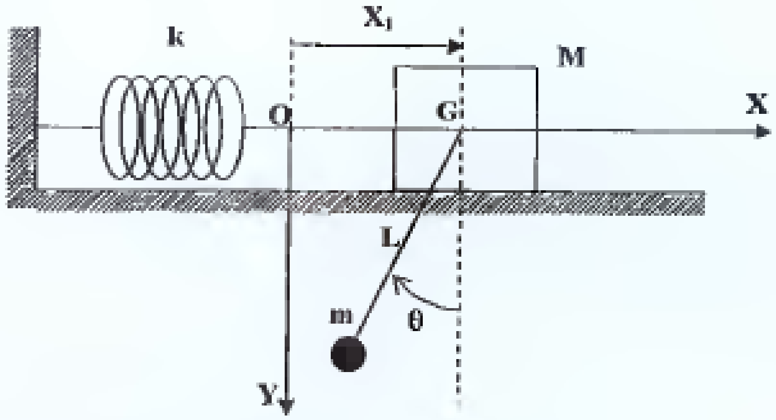
Figure 3.b

USTHB/ Faculté de Physique / LMD-ST-L2 Module «Vibrations et Ondes Mécaniques »
Année 2007-2008

EPREUVE FINALE
(Durée : 1h30mn)

A/ VIBRATIONS : (13Points)

1ère Partie: Etude des oscillations libres



On considère le système mécanique représenté sur la figure ci-dessus. La masse **M** se déplace horizontalement sur une plateforme sans frottement. Une deuxième masse ponctuelle **m** est reliée à la masse **M** par un fil rigide inextensible de longueur L et de masse négligeable. On repère ce système par le déplacement **X_1** de la masse M et par l'angle **θ** que fait le pendule par rapport à sa position d'équilibre. A l'équilibre **X_1=0** et **θ=0, le ressort n'est pas déformé.** On étudie **le cas des oscillations de faible amplitude** autour de cette position d'équilibre.

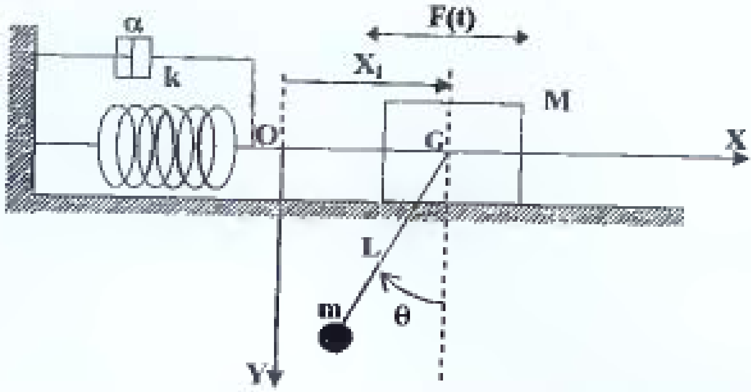
1) Calculer, en fonction de X_1 et θ, les coordonnées des masses M et m dans le repère **XOY**
2) En déduire l'énergie potentielle et l'énergie cinétique du système
3) Etablir les équations différentielles du mouvement
4) En posant **X_2= Lθ** et dans le cas où **M=m** et **$k/m=g/l=\omega_0^2$**, montrer que ces équations différentielles peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} 2\ddot{X}_1 + \omega_0^2 X_1 - \ddot{X}_2 = 0 \\ -\ddot{X}_1 + \ddot{X}_2 + \omega_0^2 X_2 = 0 \end{cases}$$

5) Calculer les pulsations propres ω_1 et ω_2 de ce système en fonction de ω_0

2ème Partie : Etude des oscillations amorties et forcées

On rajoute maintenant un amortisseur de coefficient de frottement visqueux **α** en parallèle avec le ressort et on applique sur la masse M une force sinusoïdale **$F(t)=F_0 \sin(\omega t)$**



1) Etablir les équations différentielle qui régissent les variations **de X_1 et X_2**

2) En déduire les équations **intégro-différentielles** en fonction des vitesses $\dot{X}_1$ et $\dot{X}_2$.

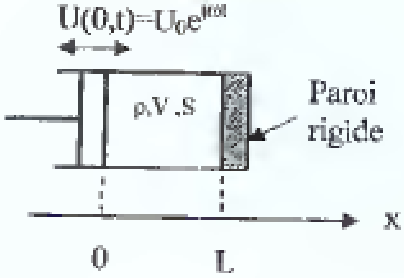
3) En utilisant **l'analogie force-tension**, donner les équations intégro-différentielles qui régissent le **système électrique** analogue au système mécanique étudié. On précisera soigneusement toutes les grandeurs mécaniques et électriques respectivement analogues

4) Représenter le **schéma électrique** correspondant. Que devient le schéma électrique si la pulsation d'excitation était telle que $\omega=\omega_0$?

5) Etudier **le comportement** du système mécanique dans ce cas.

<u>B/ ONDES</u> (07Points)

Soit un tuyau de longueur **L** et de section **S**, rempli d'un fluide de masse volumique ρ à la pression **P**. Un piston, placé en x=0, vibre selon la loi: $U(0,t) = U_0 e^{j\omega t}$.



1°) Donner l'expression de l'onde résultante **en déplacement** en un point x du tuyau.

2°)

a) Ecrire les conditions aux limites en **x=0** et **x=L**.

b) Montrer que le déplacement peut s'exprimer par: $U(x,t) = U(x)e^{j\omega t}$

c) Spécifier l'expression de **l'amplitude** U(x)

3°) Déterminer la surpression **p(x).**

4°) En déduire les positions des **maxima (ventres)** et des **minima (nœuds)** de pression.

5°) On désire maintenant que le tuyau soit uniquement le siège **d'une onde progressive, quelle condition faut-il remplir pour qu'il n' y ait pas réflexion?**

USTHB/ Faculté de Physique / LMD-ST-L2 Module «Vibrations et Ondes Mécaniques »
Année 2007-2008

EPREUVE FINALE
(Corrigé)

A/ VIBRATIONS : (13Points)

1ère Partie:Etude des oscillations libres

1°) $\vec{r}_M = \begin{cases} x_M = X_1 \\ y_M = 0 \end{cases}$ **(0,5pt)** $\quad \vec{r}_m = \begin{cases} x_m = X_1 - L\theta \\ y_m = L\cos\theta \end{cases}$ **(0,5pt)**

2°) $U_S = \frac{1}{2}kX_1^2 + \frac{1}{2}mgL\theta^2 + Constante$ **(01pt)** ; $T_S = \frac{1}{2}M\dot{X}_1^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{X}_1 - L\dot{\theta}\right)^2$ **(01pt)**

$$L_s = \frac{1}{2}M\dot{X}_1^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{X}_1 - L\dot{\theta}\right)^2 - \frac{1}{2}kX_1^2 - \frac{1}{2}mgL\theta^2 + Constante$$

3°) $\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_S}{\partial \dot{X}_1}\right) - \frac{\partial L_S}{\partial X_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_S}{\partial \dot{X}_2}\right) - \frac{\partial L_S}{\partial X_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (M+m)\ddot{X}_1 - mL\ddot{\theta} + kX_1 = 0 \\ mL^2\ddot{\theta} - mL\ddot{X}_1 + mgL\theta = 0 \end{cases}$ **(01pt)**

4°) $\begin{cases} 2\ddot{X}_1 + \omega_0^2 X_1 - \ddot{X}_2 = 0 \\ -\ddot{X}_1 + \ddot{X}_2 + \omega_0^2 X_2 = 0 \end{cases}$

5°) En posant $\dot{X}_1 = Ae^{j\omega t}$ et $\dot{X}_2 = Be^{j\omega t}$

$\begin{cases} (\omega_0^2 - 2\omega^2)A + \omega^2 B = 0 \\ \omega^2 A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta(\omega) = \begin{vmatrix} (\omega_0^2 - 2\omega^2) & \omega^2 \\ \omega^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\omega_0 \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\omega_0 \end{cases}$ **(01pt)**

2ème Partie : Etude des oscillations amorties et forcées

1°) $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L_S}{\partial \dot{X}_1}\right) - \dfrac{\partial L_S}{\partial X_1} + \dfrac{\partial D_S}{\partial \dot{X}_1} = F(t) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L_S}{\partial \dot{X}_2}\right) - \dfrac{\partial L_S}{\partial X_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m\ddot{X}_1 + \alpha \dot{X}_1 + kX_1 - m\ddot{X}_2 = F(t) \\ -m\ddot{X}_1 + m\ddot{X}_2 + kX_2 = 0 \end{cases}$ **(01pt)**

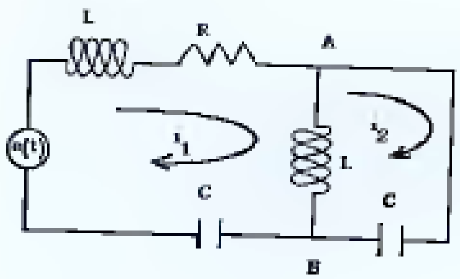
2°) $\begin{cases} 2m\dfrac{d\dot{X}_1}{dt} + \alpha \dot{X}_1 + k\int \dot{X}_1\, dt - m\dfrac{d\dot{X}_2}{dt} = F(t) \\ -m\dfrac{d\dot{X}_1}{dt} + m\dfrac{d\dot{X}_2}{dt} + k\int \dot{X}_2\, dt = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2jm\omega \dot{X}_1 + \alpha \dot{X}_1 + \dfrac{k}{j\omega}\dot{X}_1 - jm\omega \dot{X}_2 = F(t) \\ -jm\omega \dot{X}_1 + jm\omega \dot{X}_2 + \dfrac{k}{j\omega}\dot{X}_2 = 0 \end{cases}$ **(01pt)**

3°) Analogie Force – Tension

$F(t) \leftrightarrow e(t)$; $\dot{X}_1 \leftrightarrow i_1$; $\dot{X}_2 \leftrightarrow i_2$; $m \leftrightarrow L$; $\alpha \leftrightarrow R$; $k \leftrightarrow \dfrac{1}{C}$; **(01pt)**

$\begin{cases} L\dfrac{di_1}{dt} + L\dfrac{d}{dt}(i_1 - i_2) + Ri_1 + \dfrac{1}{C}\int i_1 dt = e(t) \\ L\dfrac{d}{dt}(i_2 - i_1) + \dfrac{1}{C}\int i_2 dt = 0 \end{cases}$ **(01pt)**

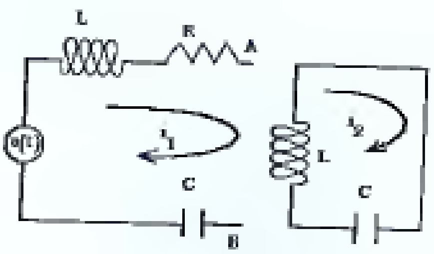
4°)



(02pt)

5°) Cas où $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow Z_{AB} = \infty \Rightarrow i_1 = 0 \Rightarrow \dot{X}_1 = 0$. **Ou bien**

$\begin{cases} \left[R + j\left(2L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)\right]i_1 - jL\omega i_2 = e(t) \\ -jL\omega i_1 + j(L\omega - \dfrac{1}{C\omega})i_2 = 0 \end{cases}$ **(0,5pt)**



(0,5pt)

Donc, à cette fréquence, la masse M reste immobile et le pendule oscille librement. **(01pt)**

B/ ONDES (07Points)

1°) $U(x,t) = Ae^{j(\omega t-kx)} + Be^{j(\omega t+kx)}$ **(01pt)**

a) $x=0 \Rightarrow U_0 = A+B$ **(0,5pt)**

$x=L \Rightarrow R_a = \frac{B}{A}e^{2jkL} = \frac{Z_C - Z_L}{Z_C + Z_L}$; $Z_l \to \infty$ (paroi rigide) $\Rightarrow \frac{B}{A}e^{2jkL} = -1$ **(0,5pt)**

b) $\Rightarrow A = \frac{U_0}{1-e^{-2jkL}}$ et $B = -\frac{U_0}{1-e^{-2jkL}}e^{-2jkL}$

$$U(x,t) = U_0 e^{j\omega t}\left[\frac{e^{-jkx}}{1-e^{-2jkL}} + \frac{e^{jkx}}{1-e^{2jkL}}\right]$$ **(01pt)**

$1-e^{-2jkL} = e^{-jkl}\left(e^{jkL} - e^{-jkL}\right)$ et $1-e^{2jkL} = e^{jkl}\left(e^{jkL} - e^{-jkL}\right)$

$$U(x,t) = U_0 e^{j\omega t}\left[\frac{e^{jk(L-x)}}{e^{jkL} - e^{-jkL}} - \frac{e^{-jk(L-x)}}{e^{jkL} - e^{-jkL}}\right] = U_0 \frac{\sin k(L-x)}{\sin kL}e^{j\omega t}$$

c) $\Rightarrow U(x) = U_0 \frac{\sin k(L-x)}{\sin kL}$ **(01pt)**

2°) $P(x,t) = -\rho V^2 \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = \rho V \omega U_0 \cos k(L-x) e^{j\omega t} = P(x)e^{j\omega t}$ **(01pt)**

3°)

a) Positions des maxima: $\cos k(L-x) = \pm 1$; $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow x_n = L - n\frac{\lambda}{2}$ **(0,5pt)**

b) Positions des minima: $\cos k(L-x) = 0 \Rightarrow x_n = L - \frac{(2n+1)}{4}\lambda$ **(0,5pt)**

4°) La condition qu'il faut remplir est $Z_L = Z_C$ **(01pt)**