

**Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediene**

Faculté de Physique

VIBRATIONS ET ONDES MECANIQUES

Cours & Exercices

Pr. DJELOUAH Hakim

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté de Physique

Licence de Physique - L2 - S3

Module : Physique 3

Vibrations et Ondes Mécaniques

Cours & Exercices

H. Djelouah

Année Universitaire 2011-2012

Avant-Propos

Au sujet de ce manuel

Ce manuel a été écrit à l'intention des étudiants de deuxième année des filières scientifiques et techniques des universités et écoles d'ingénieurs d'Algérie. Il correspond au programme officiel du module *Vibrations et Ondes mécaniques* enseigné en deuxième année (L2-S3) des filières *ST-Sciences et Technique* et *SM-Sciences de la Matière*.

Les objectifs assignés par ce programme portent sur l'initiation des étudiants de deuxième année aux phénomènes de vibrations mécaniques et de propagation des ondes mécaniques. Ce manuel essaie de répondre au mieux aux recommandations du programme officiel.

L'utilisation du formalisme de Lagrange est clairement spécifiée dans le programme officiel. Nous avons essayé d'introduire le formalisme de Lagrange le plus simplement possible dans le cas particulier d'un système à une particule possédant un degré de liberté. La classification des différents types de liaison n'est pas abordée. Il nous a semblé opportun d'insister sur la notion de force généralisée et d'introduire, dans le cas des systèmes dissipatifs, la notion de fonction dissipation. La généralisation aux systèmes à plusieurs degrés de liberté est énoncée sans démonstration.

L'étude des oscillations est volontairement restreinte aux oscillations de faible amplitude. Cette démarche est présentée dans le chapitre intitulé *Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté*. De plus, les seules forces de frottement prises en compte sont les forces de frottement de viscosité proportionnelles à la vitesse.

Les notions de résonance et d'impédance mécanique font l'objet du chapitre suivant consacré aux oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté. L'étude des systèmes oscillatoires à plusieurs degrés de liberté est restreinte aux systèmes possédant deux degrés de liberté. La méthode matricielle de recherche des modes n'est pas utilisée en raison des connaissances pré-requises en calcul matriciel. Nous avons opté pour une démarche basée sur la superposition de solutions particulières sinusoïdales. L'étude des oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté permet de consolider les notions de résonance et d'impédance et d'introduire le phénomène d'anti-résonance. Les analogies entre les systèmes électriques et mécaniques sont présentées dans une annexe.

Le programme officiel recommande d'introduire la propagation des ondes mécaniques en utilisant le modèle de la chaîne linéaire et assurer ensuite le passage du milieu discret au milieu continu ; nous avons estimé que cette démarche, bien que très intéressante, n'était pas adaptée au niveau de nos étudiants car elle introduit la notion d'onde par des concepts relativement difficiles tels que la notion de dispersion. Pour cela nous avons préféré introduire la propagation des ondes mécaniques à travers le modèle plus classique de la corde vibrante qui permet de mettre en évidence la différence entre vitesse de vibration et vitesse de propagation. Pour des raisons pédagogiques, nous avons préféré établir l'équation de propagation à l'aide du formalisme de Newton plutôt qu'en utilisant le formalisme de Lagrange. L'équation de propagation est résolue par la méthode de d'Alembert présentée dans un chapitre intitulé *Généralités sur les phénomènes de propagation*. La méthode de Fourier est présentée lors de la résolution du problème des oscillations libres d'une corde de longueur finie. Les notions d'impédance, de modes propres et de résonance sont définies dans ce chapitre.

La propagation des ondes élastiques dans les solides est abordée dans le chapitre suivant où, volontairement, nous avons préféré commencer par les systèmes continus non dispersifs puis aborder le modèle de la chaîne linéaire et finir avec le passage à la limite d'un milieu discret vers un milieu continu.

La propagation des ondes acoustiques dans les fluides est abordée dans le dernier chapitre. Les notions d'intensité acoustique et de niveau sonore sont présentées dans des cas simples. L'effet Doppler est introduit de façon assez sommaire.

Semaine	Cours	Travaux Dirigés
1	Equations différentielles	Rappels de mécanique
2	Formalisme de Lagrange	Equations différentielles
3	Oscillations libres des systèmes non amortis à 1 degré de liberté	Formalisme de Lagrange
4	Oscillations libres des systèmes amortis à 1 degré de liberté	Oscillations libres des systèmes non amortis à 1 degré de liberté
5	Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté	Oscillations libres des systèmes amortis à 1 degré de liberté
6	Oscillations libres des systèmes à deux degré de liberté	Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté
7	Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté	Oscillations libres des systèmes à deux degré de liberté
8	Généralités sur les ondes	Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté
9	Cordes vibrantes	Généralités sur les ondes
10	Ondes acoustiques dans les fluides	Cordes vibrantes
11	Ondes dans les milieux discrets	Ondes acoustiques dans les fluides
12	Ondes élastiques dans les solides	Ondes dans les milieux discrets

TABLE 1: Proposition de progression des enseignements

Afin de combler les lacunes éventuelles des étudiants venant de première année, il nous a semblé nécessaire de consacrer un chapitre entier (Annexe) à la résolution des équations différentielles du second ordre à coefficients constants.

Enfin, une bibliographie sommaire présente les principaux ouvrages utilisés pour la confection de ce manuel.

Gestion du temps pédagogique

Le contenu de ce programme est prévu pour être enseigné pendant un semestre de 15 semaines, à raison de deux cours hebdomadaires de 1h30mn et une séance de travaux dirigés de 1h30mn par semaine. Toutefois pour diverses raisons, la durée réelle de l'enseignement par semestre est de 12-13 semaines. Afin de couvrir la plus grande partie du programme officiel pendant cette durée une gestion rigoureuse du temps pédagogique ainsi qu'une coordination-synchronisation entre les cours et les travaux dirigés sont indispensables. Nous recommandons la progression ci-dessus (Tableau 1) dans laquelle la durée *réelle* du semestre (12-13 semaines) est répartie équitablement entre les vibrations mécaniques et les ondes mécaniques.

Ce manuel est le fruit d'une longue pratique pédagogique dans cette matière et résulte de longues discussions avec les collègues qui ont eu à assurer cet enseignement. Les exercices proposés dans ce manuel ont été confectionnés à partir d'une compilation des séries d'exercices et des sujets d'examens proposés par les collègues qui enseignent le module *Vibrations et Ondes Mécaniques* à la Faculté de Physique de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene.

En parallèle un enseignement de travaux pratiques est dispensé dans un autre module à raison d'une séance de 3 heures toutes les deux semaines. Les collègues en charge du module de travaux pratiques essaient de synchroniser le contenu de leur enseignement avec le contenu dispensé en cours et en travaux dirigés.

Table des matières

Avant-Propos	ii
1 Introduction aux équations de Lagrange	1
1.1 Equations de Lagrange pour une particule	1
1.1.1 Equations de Lagrange	1
1.1.2 Cas des systèmes conservatifs	3
1.1.3 Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse	3
1.1.4 Cas d'une force extérieure dépendant du temps	5
1.2 Système à plusieurs degrés de liberté	5
2 Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté	7
2.1 Oscillations non amorties	7
2.1.1 Oscillateur linéaire	7
2.1.2 Energie cinétique	7
2.1.3 Energie potentielle	8
2.1.4 Equation différentielle	8
2.1.5 Résolution de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple	8
2.2 Oscillations libres des systèmes amortis à un degré de liberté	9
2.2.1 Equation de Lagrange pour les systèmes dissipatifs	9
2.2.2 Cas particulier des oscillations de faible amplitude	9
2.2.3 Résolution de l'équation différentielle	10
3 Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté	17
3.1 Equation différentielle	17
3.2 Système masse-ressort-amortisseur	17
3.3 Solution de l'équation différentielle	18
3.3.1 Cas particulier où $A(t) = A_0 \cos(\Omega t)$	19
3.3.2 Cas d'une excitation périodique	22
3.4 Impédance mécanique	23
3.4.1 Définition	23
3.4.2 Impédances mécaniques	23
3.4.3 Puissance	23
3.4.4 Applications	24
4 Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté	29
4.1 Introduction	29
4.2 Systèmes à deux degrés de liberté	30
4.2.1 Système masses-ressorts en translation	30
4.2.2 Cas particulier de deux oscillateurs identiques	33
4.2.3 Pendules couplés	36

5	Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté	41
5.1	Equations de Lagrange	41
5.2	Système masses-ressorts-amortisseurs	41
5.2.1	Equations différentielles	42
5.2.2	Etude du régime permanent sinusoïdal	42
5.3	Impédance	43
5.4	Application	44
6	Généralités sur les phénomènes de propagation	47
6.1	Propagation à une dimension	47
6.1.1	Equation de propagation	47
6.1.2	Solution de l'équation de propagation	47
6.1.3	Onde progressive sinusoïdale	50
6.1.4	Superposition de deux ondes progressives sinusoïdales	51
6.1.5	Vitesse de phase	52
6.1.6	Vitesse de groupe	53
6.1.7	Onde vectorielle	54
6.2	Propagation dans l'espace à trois dimensions	55
6.2.1	Equation de propagation	55
6.2.2	Onde plane progressive sinusoïdale	55
7	Cordes vibrantes	59
7.1	Equation des ondes	59
7.2	Ondes progressives harmoniques	60
7.2.1	Définition	60
7.2.2	Force en un point	60
7.2.3	Impédance	61
7.3	Oscillations libres d'une corde de longueur finie	61
7.4	Réflexion et transmission	63
7.4.1	Réflexion et transmission entre deux cordes semi-infinies	63
7.4.2	Réflexion sur une impédance quelconque	63
8	Ondes élastiques dans les solides	67
8.1	Propriétés élastiques des solides	67
8.1.1	Déformation	67
8.1.2	Contrainte moyenne	68
8.1.3	Loi de Hooke	68
8.1.4	Coefficient de Poisson	68
8.1.5	Loi de Hooke pour les forces tangentielles	69
8.2	Onde plane longitudinale	69
8.2.1	Equation de propagation	69
8.2.2	Ondes progressives harmoniques	70
8.2.3	Réflexion et transmission	71
8.2.4	Oscillations libres d'un barreau	72
8.2.5	Oscillations forcées d'un barreau de longueur finie	74
8.3	Ondes élastiques transversales	75
8.4	Modèle de la chaîne linéaire	76
8.4.1	Modélisation microscopique du problème et mise en équations.	76
8.4.2	Solution en régime permanent sinusoïdal	77
8.4.3	L'approximation d'un milieu continu.	78

9 Ondes acoustiques dans les fluides	83
9.1 Introduction	83
9.2 Equation d'onde	83
9.3 Vitesse du son	85
9.4 Onde progressive sinusoïdale	86
9.4.1 Définition	86
9.4.2 Impédance acoustique	87
9.4.3 Energie acoustique	87
9.5 Réflexion-Transmission	90
9.6 Effet Doppler	92
9.6.1 Définition	92
9.6.2 Cas particulier des faibles vitesses	92
A Equations différentielles	95
A.1 Introduction	95
A.2 Equation homogène	95
A.2.1 Régime fortement amorti ($\delta > \omega_0$)	96
A.2.2 Régime critique ($\delta = \omega_0$)	97
A.2.3 Régime pseudo-périodique ($\delta < \omega_0$)	97
A.3 Equation avec second membre	100
A.3.1 Solution générale	100
A.3.2 Cas particulier où $A(t)$ est constante	100
A.3.3 Cas particulier où $A(t) = A_0 \cos(\Omega t)$:	101
A.3.4 Cas où $A(t)$ est une fonction périodique du temps	102
B Analogies électromécaniques	107
B.1 Introduction	107
B.2 Analogie force-tension ou masse-inductance	107
B.3 Systèmes à un degré de liberté	109
B.4 Système à deux degrés de liberté	109
Bibliographie	112

Chapitre 1

Introduction aux équations de Lagrange

1.1 Equations de Lagrange pour une particule

1.1.1 Equations de Lagrange

Considérons le cas particulier d'une particule astreinte à se déplacer, sans frottement, sur une courbe plane contenue dans le plan xOy . La courbe sur laquelle est astreinte à se déplacer la particule de masse m , est le lieu des points dont les coordonnées vérifient les relations :

$$\begin{cases} z = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

La première relation correspond au plan xOy . La seconde relation représente l'équation de la trajectoire dans ce plan. Ces deux relations définissent les équations des liaisons appelées souvent liaisons. Le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de coordonnées qui représentent la position de m (trois dans le cas général) moins le nombre de liaisons (deux dans le cas particulier étudié ici). La particule possède donc un degré de liberté. Il faut choisir une variable q pour repérer sa position. Cette variable est appelée coordonnée généralisée. Il est possible d'exprimer le vecteur position $\vec{r}$ de la particule en fonction de la coordonnée généralisée q par la relation : $\vec{r} = \vec{r}(q)$.

Soit $\vec{F}$ la résultante de toutes les forces agissant sur la particule. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

où $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ est la vitesse de la particule.

Soit δW le travail fourni par la force $\vec{F}$ lors d'un déplacement infinitésimal $\delta \vec{r}$:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$$

Le déplacement infinitésimal $\delta \vec{r}$ peut s'écrire en fonction de la variation δq de la coordonnée généralisée q :

$$\delta \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \delta q$$

Dans ce cas le travail δW peut se mettre la forme :

$$\delta W = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \delta q$$

On appelle force généralisée conjuguée de q , ou q -composante de la force, la quantité F_q définie par :

$$F_q = \frac{\delta W}{\delta q} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}$$

Par conséquent δW s'écrit :

$$\delta W = F_q \delta q$$

En tenant compte de la relation fondamentale de la dynamique, cette expression peut également s'écrire :

$$\delta W = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \delta q$$

D'autre part :

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right] = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} + \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right]$$

Sachant que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right] = \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q}$$

on obtient

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left[\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right] - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q}$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}$, peut aussi s'écrire :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \dot{q}$$

D'où la relation :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}}$$

et

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left[\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}} \right] - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q}$$

Sachant que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} v^2 \right] = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right] = \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}}$$

et que

$$\frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{2} v^2 \right] = \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right] = \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q}$$

on obtient

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} v^2 \right] \right] - \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{2} v^2 \right]$$

L'expression du travail δW peut alors s'écrire :

$$\delta W = m \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} v^2 \right] \right] - \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{2} v^2 \right] \right\} \delta q$$

Si on note $T = \frac{1}{2} m v^2$ l'énergie cinétique de la masse m , on obtient finalement :

$$\delta W = \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q} \right\} \delta q$$

On obtient finalement les deux expressions équivalentes du travail δW

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q} \right\} \delta q = F_q \delta q$$

On en déduit l'équation de d'Alembert pour un système à un degré de liberté :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q} = F_q$$

1.1.2 Cas des systèmes conservatifs

Dans les systèmes conservatifs, la force appliquée au système dérive d'un potentiel U et elle s'écrit :

$$F_q = - \frac{\partial U}{\partial q}$$

L'équation de Lagrange devient alors :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial U}{\partial q}$$

Généralement l'énergie potentielle U ne dépend pas de la vitesse, c'est-à-dire que $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} = 0$. L'équation de Lagrange peut alors s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial (T - U)}{\partial q} = 0$$

On introduit la fonction de Lagrange (ou lagrangien du système) qui est la différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{L} = T - U$$

D'où la forme de l'équation de Lagrange dans le cas d'un système conservatif :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

1.1.3 Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse

Equation de Lagrange

Considérons une situation physique dans laquelle la particule est soumise à des forces de frottement de viscosité dont la résultante $\vec{f}$ est de la forme :

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v}$$

Pour calculer la force généralisée f_q correspondante, nous utilisons la définition du paragraphe précédent :

$$f_q = \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = -\alpha \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right]^2 \frac{\partial q}{\partial t}$$

Cette dernière expression peut se mettre sous la forme :

$$f_q = -\beta \dot{q}$$

avec

$$\beta = \alpha \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right]^2$$

Si en plus des forces qui dérivent d'un potentiel il existe des forces de frottement de viscosité, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q} = F_{U,q} + f_q$$

où $F_{U,q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$ représente les forces qui dérivent d'un potentiel. D'où :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\beta \dot{q}$$

Fonction dissipation

Calculons le travail δW_f fourni par la force de frottement pendant un intervalle de temps δt pour un déplacement $\delta \vec{r}$:

$$\delta W_f = \vec{f} \cdot \delta \vec{r} = -\alpha v^2 \delta t$$

La quantité de chaleur δQ gagnée par le système en interaction avec la particule, est telle que :

$$\delta Q = \alpha v^2 \delta t$$

Soit $P_d = \frac{\delta Q}{\delta t}$ la puissance dissipée par les forces de frottement sous forme de chaleur :

$$P_d = \alpha v^2$$

Cette puissance dissipée peut être exprimée en fonction de $\dot{q}$, par :

$$P_d = \alpha \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \right]^2 = \alpha \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} \right]^2 = \beta \dot{q}^2$$

Par définition, la fonction dissipation est égale à la demi-puissance dissipée :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} P_d = \frac{1}{2} \beta \dot{q}^2$$

La q -composante f_q de la force de frottement peut alors s'écrire :

$$f_q = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}}$$

L'équation de Lagrange s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} = 0$$

1.1.4 Cas d'une force extérieure dépendant du temps

Considérons le cas plus général d'une force extérieure dépendant du temps agissant sur un système qui est le siège de forces de frottement qui dérivent d'une fonction dissipation $\mathcal{D}$. Soit F_{eq} la q -composante de la force extérieure. Dans ce cas l'équation de Lagrange peut s'écrire sous l'une des deux formes équivalentes suivantes :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = F_{eq} - \beta \dot{q}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} = F_{e,q}$$

1.2 Système à plusieurs degrés de liberté

Dans le cas général d'un système à plusieurs degrés de liberté, il y a autant d'équations de Lagrange que de degrés de liberté. Ainsi, si le système possède N degrés de liberté, il est nécessaire d'avoir N coordonnées généralisées q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) ; nous aurons ainsi N équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = F_{e,q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

La q_i -composante de la force généralisée extérieure est définie par :

$$F_{e,q_i} = \left. \frac{\delta W}{\delta q_i} \right|_{\delta q_{j \neq i} = 0}$$

Dans cette expression δW représente le travail des forces extérieures résultant d'une variation δq_i de la coordonnée q_i telle que les coordonnées $q_{j \neq i}$ soient constantes ($\delta q_{j \neq i} = 0$).

Exercices

Exercice 1 : On considère un point matériel astreint à se déplacer sur un cercle de rayon R et de centre O contenu dans le plan xOy .

1. Traduire la liaison par une ou des relations mathématiques ; quel est le nombre de degrés de liberté de ce point ?
2. Quelles sont les coordonnées généralisées que l'on peut utiliser pour repérer ce point ?

Exercice 2 : On considère un point matériel astreint à se déplacer sur une sphère. Répondre aux mêmes questions que l'exercice précédent.

Exercice 3 : Pour repérer la position d'un solide dans l'espace, il faut repérer la position de trois points non alignés A , B et C de ce solide.

1. Traduire les liaisons physiques par des relations mathématiques ; quel est le nombre de degrés de liberté de ce solide ?
2. Quelles sont les coordonnées généralisées les plus couramment utilisées pour décrire le mouvement d'un solide ?
3. Quel est le nombre de degrés de liberté pour un solide qui possède :
 - (a) un point fixe ?
 - (b) deux points fixes ?

Exercice 4 : On considère une haltère constituée de deux masses identiques m , supposées ponctuelles, reliées par une tige de longueur a , de diamètre et de masse négligeables.

1. Comment s'écrit mathématiquement la liaison entre les deux masses ?
2. Quel est le nombre de degrés de liberté de ce système ?

Exercice 5 : On considère une masse M qui glisse sans frottement selon une droite sur un plan horizontal. Elle est reliée à un bâti fixe par un ressort parfait de raideur k , colinéaire avec la trajectoire.

1. Quel est le nombre de degrés de liberté ?
2. Quelles sont les forces qui s'exercent sur la masse M . Quelles sont celles qui dérivent d'un potentiel ? Quelles sont celles qui ne travaillent pas ?
3. Calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de ce système ; en déduire l'équation différentielle du mouvement par la méthode des équations de Lagrange.
4. Etablir l'équation différentielle du mouvement en utilisant la seconde loi de Newton ; que remarque-t-on ? Quelles sont les forces qui n'interviennent pas dans l'équation de Lagrange et qui sont prises en compte dans les équations de Newton ? Quelle est leur particularité ?

Exercice 6 : On considère un pendule simple constitué d'une masse m reliée à un point fixe O par un fil de longueur ℓ et de masse négligeable. Cette masse peut osciller librement dans le plan vertical xOy .

1. Quel est le nombre de degrés de liberté de ce système ? Quelles sont les coordonnées généralisées les plus pratiques à utiliser ? Ecrire les coordonnées x et y de la masse m dans le repère xOy en fonction des coordonnées généralisées choisies.
2. Quelles sont les forces qui s'exercent sur la masse m . Quelles sont celles qui dérivent d'un potentiel ? Quelles sont celles dont le travail n'est pas nul au cours du mouvement ?
3. Etablir les équations du mouvement par la méthode des équations de Lagrange.
4. Ecrire les équations du mouvement par la méthode de Newton ; retrouve-t-on le même résultat que par la méthode de Lagrange ? Déterminer le module de l'action du fil sur la masse m ; pouvait-on déterminer ce module par la méthode de Lagrange ? Commenter le résultat.

Exercice 7 : Etudier le mouvement d'un cylindre de masse M et de rayon R , qui roule sans glisser le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné qui fait un angle φ avec l'horizontale.

Exercice 8 : Etudier à l'aide des équations de Lagrange, le mouvement d'une masse M qui glisse sur un plan incliné faisant un angle φ avec l'horizontale, avec un coefficient de frottement de glissement μ . La masse est soumise de plus à une force $F(t)$ parallèle au plan incliné.

Exercice 9 : Etudier, à l'aide des équations de Lagrange, le mouvement d'un cylindre de masse M et de rayon R autour de son axe de révolution fixé horizontalement, entraîné en rotation par l'action de forces extérieures dont le moment par rapport à l'axe de rotation est $\mathcal{M}(t)$.

Exercice 10 : Une particule de masse m est lâchée sans vitesse initiale dans un fluide caractérisé par un coefficient de frottement visqueux α . Etudier son mouvement à l'aide des équations de Lagrange.

Exercice 11 : Etablir l'équation différentielle du mouvement, dans un plan vertical, d'une masse ponctuelle m reliée à un point O par une tige de longueur ℓ et de masse négligeable. La masse est soumise à une force $F(t)$ qui reste perpendiculaire à la tige lors du mouvement. Les forces de frottement de viscosité peuvent être ramenées à une force $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ appliquée à la masse m dont la vitesse instantanée est $\vec{v}$. Le coefficient de frottement visqueux α est supposé constant.

Chapitre 2

Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

2.1 Oscillations non amorties

2.1.1 Oscillateur linéaire

Un système oscillant à un degré de liberté est habituellement repéré à l'aide d'une coordonnée généralisée q qui est l'écart par rapport à la position d'équilibre stable. Le mouvement vibratoire est dit linéaire s'il est régi par une équation différentielle harmonique de la forme :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Cette équation est appelée équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple.

2.1.2 Energie cinétique

Dans le cas d'un système à un degré de liberté, constitué d'une masse m dont la position est repérée par la coordonnée généralisée q , l'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right]^2 = \frac{1}{2} m \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} \right]^2 = \frac{1}{2} m \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right]^2 \dot{q}^2$$

L'énergie cinétique d'un système à un degré de liberté est fonction de q et $\dot{q}$. Elle peut s'écrire sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2$$

où $a(q)$ est une fonction de la coordonnée généralisée q , définie dans le cas étudié par :

$$a(q) = m \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right]^2$$

En faisant un développement limité de $a(q)$ au second ordre en q , au voisinage de $q = 0$, on obtient :

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \left[a(0) + \left. \frac{\partial a}{\partial q} \right|_{q=0} q + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 a}{\partial q^2} \right|_{q=0} q^2 + \dots \right] \dot{q}^2$$

En limitant l'approximation au second ordre, on obtient :

$$T = \frac{1}{2} a_0 \dot{q}^2$$

où a_0 est une constante égale à $a(0)$.

2.1.3 Energie potentielle

Les oscillations se font autour de la position d'équilibre stable $q = 0$ caractérisée par :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=0} = 0$$

Il est toujours possible, lorsque les écarts par rapport à la position d'équilibre sont faibles, de faire un développement en série de Taylor de $U(q)$ au voisinage de la position d'équilibre $q = 0$. En négligeant les puissances de q d'ordre supérieur à deux, on obtient :

$$U(q) = U(0) + \left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=0} q + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=0} q^2 + \dots$$

$q = 0$ correspond à un minimum de $U(q)$ pour lequel

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=0} > 0$$

Si on choisit l'origine de l'énergie potentielle à cette position d'équilibre ($U(0) = 0$), l'énergie potentielle $U(q)$ peut s'écrire sous une forme quadratique :

$$U(q) \simeq \frac{1}{2} b_0 q^2$$

$$\text{avec : } b_0 = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=0}$$

2.1.4 Equation différentielle

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

Ce qui permet d'obtenir l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple avec la valeur de la pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0^2 = \frac{b_0}{a_0} = \frac{\left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=0}}{a_0}$$

Les oscillations d'un système vibratoire s'effectuent autour d'une position d'équilibre stable. Pour des oscillations de faible amplitude autour de la position d'équilibre, tous les mouvements vibratoires peuvent être assimilés à des vibrations linéaires et l'énergie potentielle peut alors être approximée par une forme quadratique de la coordonnée q , tandis que l'énergie cinétique peut être approximée par une forme quadratique en $\dot{q}$.

2.1.5 Résolution de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple

L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple s'écrit :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

La solution d'une telle équation est une fonction sinusoïdale du temps

$$q(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

où A représente l'amplitude des oscillations, φ est la phase initiale.

Il est important de remarquer que la pulsation propre ω_0 ne dépend que des éléments qui constituent le système physique étudié (masse, ressort, etc...) tandis que l'amplitude A et la phase initiale φ sont calculées à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} q(t=0) = q_0 \\ \dot{q}(t=0) = \dot{q}_0 \end{cases}$$

Enfin l'amplitude des oscillations d'un oscillateur harmonique libre ne dépend pas du temps. De telles oscillations sont dites non amorties.

Il faut néanmoins remarquer qu'au delà d'une certaine amplitude la vibration devient non linéaire. Il s'ensuit d'abord une modification de la période des oscillations et ensuite un changement de la nature du mouvement.

2.2 Oscillations libres des systèmes amortis à un degré de liberté

Dans le paragraphe précédent, nous n'avons pas tenu compte de certaines réalités physiques. En effet, nous n'avons pas pris en compte les forces de frottement qui sont à l'origine de la perte d'énergie mécanique du système sous forme de chaleur. Dans ce paragraphe, nous allons tenir compte de ces réalités en nous limitant toutefois au cas simple où les pertes sont dues à des frottements visqueux pour lesquels les forces de frottement, qui s'opposent au mouvement, sont proportionnelles à la vitesse.

2.2.1 Equation de Lagrange pour les systèmes dissipatifs

Rappelons l'équation de Lagrange associée à un système à un degré de liberté dont l'évolution au cours du temps se ramène à l'étude de la coordonnée généralisée q

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = F_q$$

F_q représente la composante suivant q de la résultante des forces généralisées qui ne dérivent pas d'un potentiel.

Nous nous intéressons au cas particulier des forces de frottement définies par la force généralisée

$$F_q = f_q = -\beta \dot{q}$$

où β est une constante réelle positive.

L'équation de Lagrange s'écrit alors dans ce cas :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\beta \dot{q}$$

2.2.2 Cas particulier des oscillations de faible amplitude

Nous avons montré dans le chapitre précédent que dans le cas des oscillations de faible amplitude, la fonction de Lagrange s'écrivait sous la forme :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 - \frac{1}{2}bq^2$$

L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors :

$$a\ddot{q} + bq = -\beta\dot{q}$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants qui peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

où δ est un coefficient positif, appelé facteur (ou coefficient) d'amortissement et défini par :

$$\delta = \frac{\beta}{2a_0}$$

ω_0 est la pulsation propre définie par

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}$$

2.2.3 Résolution de l'équation différentielle

La solution de l'équation différentielle dépend de la valeur de δ par rapport à ω_0 :

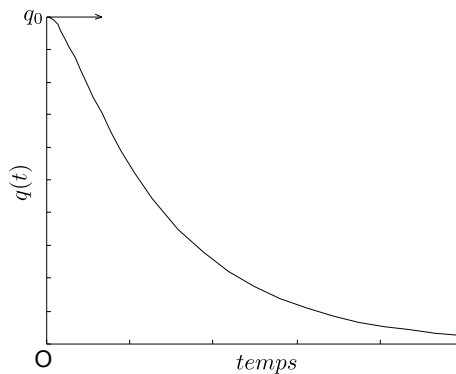
- Si $\delta > \omega_0$, on dit que le système est suramorti ou apériodique.
- Si $\delta = \omega_0$, on dit que l'on a un amortissement critique.
- Si $\delta < \omega_0$, on dit que le système est sous-amorti ou pseudopériodique.

Cas où le système est suramorti ($\delta > \omega_0$)

La solution de l'équation différentielle s'écrit dans ce cas :

$$q(t) = A_1 e^{[-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}]t} + A_2 e^{[-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}]t}$$

A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration définies par les conditions initiales. La figure ci-dessous représente q en fonction du temps dans le cas particulier où $q(0) = q_0$ et $\dot{q}(0) = 0$. $q(t)$ est une fonction qui tend exponentiellement (sans oscillation) vers zéro.



Régime fortement amorti : variation de q en fonction du temps

Cas de l'amortissement critique ($\delta = \omega_0$)

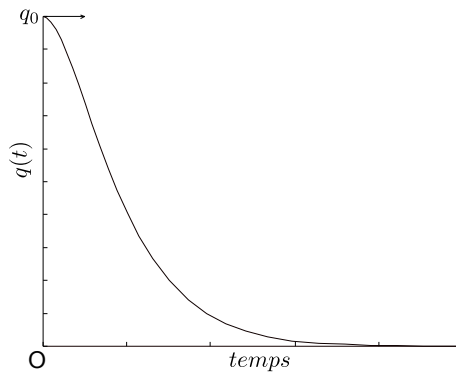
La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$q(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t}$$

Dans le cas particulier où $q(0) = q_0$ et $\dot{q}(0) = 0$,

$$q(t) = q_0 (1 + \delta t) e^{-\delta t}$$

$q(t)$ est encore une fonction qui tend vers zéro sans oscillation lorsque le temps augmente.

Amortissement critique : variation de q en fonction du temps**Cas où le système est sous-amorti ($\delta < \omega_0$)**

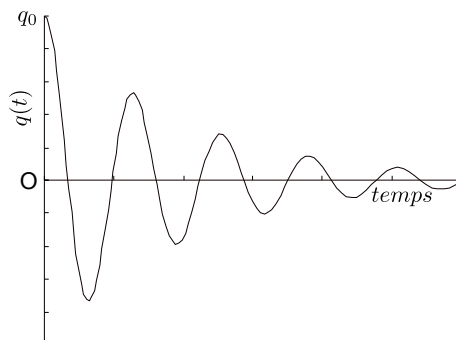
La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$q(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_A t + \phi)$$

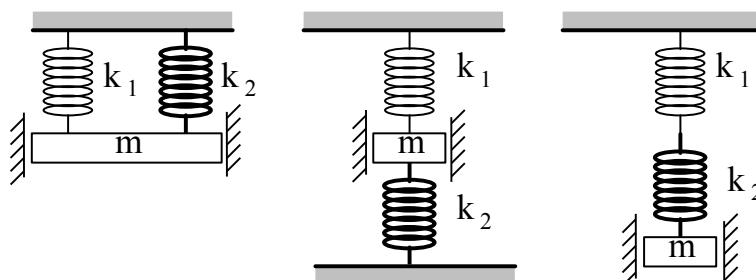
avec $\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$; A et ϕ sont deux constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales. Dans le cas particulier où $q(0) = q_0$ et $\dot{q}(0) = 0$, on obtient :

$$A = \frac{\omega_0}{\omega_A} q_0$$

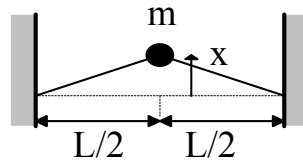
$$\phi = -\arctan\left(\frac{\delta}{\omega_A}\right)$$

Système faiblement amorti : variation de q en fonction du temps**Exercices**

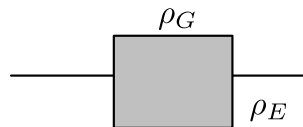
Exercice 1 : Calculer la fréquence des oscillations pour chacun des systèmes suivants dans lesquels la masse m est astreinte à un mouvement vertical uniquement :



Exercice 2 : Une masse ponctuelle m glisse sans frottement sur une table horizontale. Elle est fixée à deux bâtis fixes par deux cordes de masse négligeable tendues horizontalement. En supposant que la tension T des cordes reste constante lors du mouvement, calculer la période des oscillations pour de faibles amplitudes du mouvement dans la direction x .



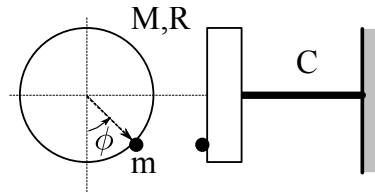
Exercice 3 : Un iceberg de masse volumique ρ_G , assimilable à un parallélépipède régulier et homogène de masse M flotte sur de l'eau de masse volumique constante ρ_E . Sa surface de base est S et sa hauteur est L .



On rappelle que la poussée d'Archimède qui s'exerce sur un objet immergé est : $\vec{P}_A = -\rho_E V \vec{g}$ où V est le volume immergé et $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur.

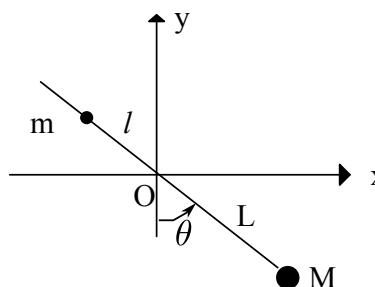
1. Calculer, à l'équilibre, le volume immergé de l'iceberg en fonction de son volume total. La masse volumique de la glace est $\rho_G = 900 \text{ kg/m}^3$; celle de l'eau est $\rho_E = 1000 \text{ kg/m}^3$.
2. L'iceberg est écarté d'une distance verticale h par rapport à sa position d'équilibre. Calculer la période de ses oscillations quand les frottements sont considérés comme négligeables. Faire l'application numérique pour $L = 150 \text{ m}$, $h = 2 \text{ m}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Exercice 4 : Une tige d'acier de constante de torsion C est soudée par son extrémité au centre d'un disque homogène de masse M et de rayon R . L'autre extrémité est encastrée dans un bâti fixe. Une masse m est soudée au point le plus bas du disque.



On tourne le disque d'un angle ϕ_0 et on le lâche sans vitesse initiale. Déterminer l'expression en fonction du temps de l'angle $\phi(t)$ d'écart du système par rapport à sa position d'équilibre. On néglige la flexion de la tige d'acier.

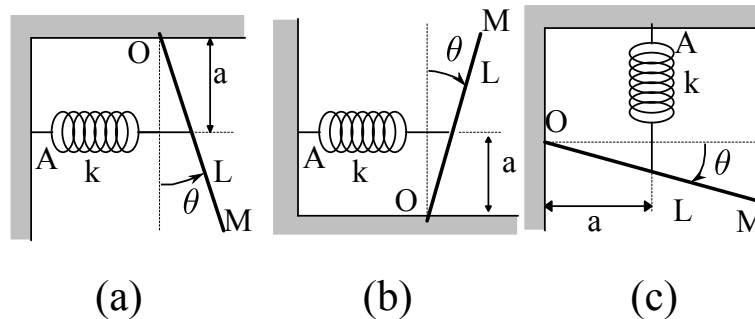
Exercice 5 : Un métronome est schématisé sur la figure ci-dessous. La masse M est soudée à l'extrémité de la tige. La position de la masse m sur la tige peut être réglée. La tige est supposée de masse négligeable ; elle est mobile sans frottements autour de O . La masse M étant en bas, on l'écarte d'un angle θ_0 petit et on l'abandonne sans vitesse initiale.



1. Quelle(s) condition(s) doit satisfaire le système pour qu'il puisse osciller ?
2. Déterminer l'expression de la période pour des oscillations de faibles amplitudes.
3. Sachant que $M = 80$ g, $m = 20$ g et $L = 4$ cm, déterminer la distance ℓ pour que la période du métronome soit égale à 2 s.
4. On veut augmenter la période d'oscillation du métronome. Faut-il rapprocher ou éloigner la masse m du point O ?

Exercice 6 : Dans les figures ci-dessous, une tige homogène de masse M et de longueur L oscille sans frottement, dans un plan vertical, autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan du mouvement en O .

1. Quelle est la déformation du ressort à l'équilibre, sachant qu'à cette position $\theta = 0$?
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des mouvements de faible amplitude.
3. A quelle condition le système de la figure (b) peut-il osciller ? Quelle est la nature du mouvement lorsque cette condition n'est pas satisfaite ?



Exercice 7 : Quand l'électron d'un atome d'hydrogène, se déplace d'une petite distance x à partir de la position d'équilibre, il subit une force de rappel donnée par :

$$F = -kx, \text{ avec } k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

où $r = 0.05$ nm correspond au rayon de l'atome. Calculer la pulsation propre ω_0 des oscillations de l'électron. On donne $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ N⁻¹ m⁻² C².

Exercice 8 : Calculer la période des oscillations d'une particule de charge q et de masse m astreinte à se déplacer selon une trajectoire rectiligne entre deux charges égales q fixées en $x = \pm a$.

Exercice 9 : Une particule de masse m se déplace dans un champ de force conservatif avec une énergie potentielle donnée par :

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} k (a^2 - x^2) & \text{pour } |x| < a \\ 0 & \text{pour } |x| \geq a \end{cases}$$

où a et k sont des constantes. Sachant que $a > 0$, étudier les types de mouvement possibles selon le signe de k .

Exercice 10 : L'énergie potentielle d'une particule de masse m est

$$V(x) = \frac{cx}{x^2 + a^2}$$

où c et a sont des constantes positives. Représenter graphiquement V en fonction de x . Etudier le mouvement des oscillations de faible amplitude au voisinage de la position d'équilibre stable. Sachant que cette particule démarre de sa position d'équilibre stable avec une vitesse v , trouver les valeurs de v pour lesquelles :

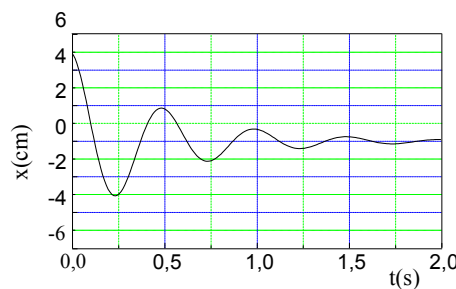
1. elle oscille au voisinage de la position d'équilibre ;
2. elle s'échappe vers $+\infty$;
3. elle s'échappe vers $-\infty$.

Exercice 11 : Une particule de masse m se déplace dans la région $x > 0$ sous l'action d'une force $F(x)$:

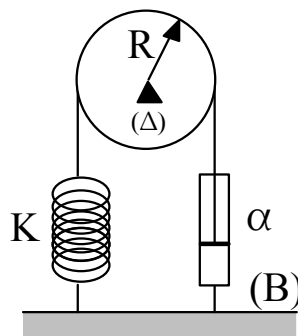
$$F(x) = -m\omega^2 \left(x - \frac{a^4}{x^3} \right)$$

où ω et a sont des constantes. Représenter graphiquement l'énergie potentielle en fonction de x . Calculer la période des oscillations de faible amplitude au voisinage de la position d'équilibre stable. La particule démarre de cette position avec une vitesse v . Trouver les valeurs de x limitant la région des oscillations. Montrer que la période des oscillations est indépendante de v . (Astuce pour le calcul de l'intégrale : faire le changement de variable $y = x^2$)

Exercice 12 : Un bloc de masse 25 kg est monté sur un support en caoutchouc, de masse négligeable, qui se comprime de 6.1 cm sous ce poids. Quand le bloc vibre librement, on enregistre les positions de la masse après l'avoir déplacé de 5 cm à partir de sa position d'équilibre (voir figure ci-dessous). Sachant que le tapis de caoutchouc peut être symbolisé par un ressort de raideur K associé à un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α , calculer ces coefficients K et α .

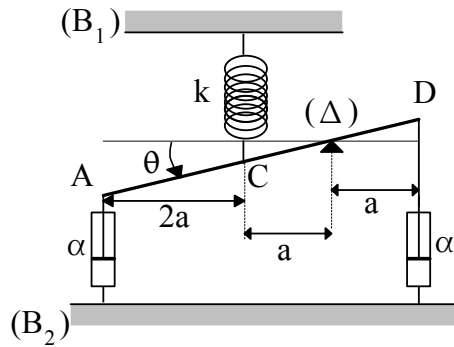


Exercice 13 : Le système de la figure ci-dessous est constitué d'un cylindre homogène de masse M et de rayon R en rotation autour de son axe de révolution fixe (Δ) . Un fil inextensible, de masse négligeable, entraîne le cylindre sans glissement sur sa périphérie ; ses deux extrémités sont reliées à un bâti fixe (B) par un ressort de raideur K et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α . Quelle la valeur critique du coefficient α_C ?



Exercice 14 : Le système mécanique de la figure ci-dessous est constitué d'une tige rectiligne AD, homogène, de masse $M = 3$ kg et de longueur $L = 2$ m. Cette tige peut tourner, dans le plan vertical, sans frottement, autour d'un axe horizontal (Δ) fixe. Les extrémités A et D de la tige sont reliées au bâti fixe B_2 par deux amortisseurs identiques de coefficient de frottement visqueux α . Le point C, milieu de la tige, est relié au bâti B_1 par un ressort de raideur k . A l'équilibre,

la tige est horizontale. Lorsque la tige est écartée de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 puis lâchée sans vitesse initiale, elle prend un mouvement oscillatoire amorti de pseudo-période 1 s. On constate qu'au bout de 5 pseudo-périodes, l'amplitude est égale à 20 % de l'amplitude initiale. En déduire la valeur numérique de α puis celle de k .



Chapitre 3

Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

3.1 Equation différentielle

Rappelons la forme générale de l'équation de Lagrange pour les systèmes à un degré de liberté :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} = F_{q_{ext}}$$

où $F_{q_{ext}}$ est la force généralisée associée à $\vec{F}_{ext}$ et où la fonction dissipation est $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\beta\dot{q}^2$.

Pour les oscillations de faible amplitude, la fonction de Lagrange pouvait se mettre sous une forme quadratique de q et $\dot{q}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}a_0 \dot{q}^2 - \frac{1}{2}b_0 q^2$$

D'où l'équation différentielle du mouvement

$$a_0 \ddot{q} + \beta \dot{q} + b_0 q = F_{q_{ext}}$$

Cette équation peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, avec second membre

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = A(t)$$

avec

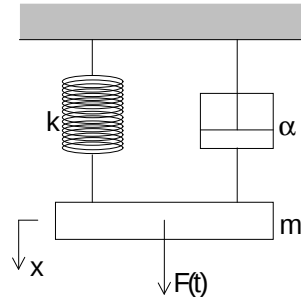
$$\delta = \frac{\beta}{2a_0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}$$

$$A(t) = \frac{F_{q_{ext}}}{a_0}$$

3.2 Système masse-ressort-amortisseur

Considérons l'exemple mécanique de la figure ci-dessous soumis à une force extérieure $\vec{F}(t)$ appliquée à la masse m .



Système masse-ressort-amortisseur

Calculons la force généralisée F_x conjuguée de la coordonnée x . Pour cela nous pouvons utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

- Soit calculer le travail δW de la force $\vec{F}(t)$ pour une variation $\delta \vec{r}$ de son point d'application

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = F dx$$

On en déduit la x -composante de la force extérieure

$$F_x = \frac{\delta W}{\delta x} = F(t)$$

- Soit utiliser la définition de la force généralisée

$$F_x = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = F(t)$$

L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = A(t)$$

avec :

$$\delta = \frac{\alpha}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad A(t) = \frac{F(t)}{m}$$

3.3 Solution de l'équation différentielle

La solution de cette équation différentielle du second ordre est égale à la somme de la solution de l'équation sans second membre (ou solution homogène) $x_H(t)$ et d'une solution particulière de l'équation avec second membre $x_P(t)$:

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

Nous avons déjà étudié l'équation sans second membre $x_H(t)$ et nous savons que cette solution contient dans tous les cas le terme exponentiel $e^{-\delta t}$. Après un intervalle de temps t supérieur à $3/\delta$ ou $4/\delta$, le terme $e^{-\delta t}$ devient très petit et la solution homogène est alors pratiquement nulle. Il ne subsistera que la solution particulière de l'équation avec second membre. L'intervalle de temps pendant lequel la solution homogène est non négligeable est appelé le régime transitoire. A la fin de ce régime transitoire commence l'intervalle de temps pour lequel la solution homogène est quasi-nulle et pour lequel la solution $x(t) \simeq x_p(t)$; ce régime est appelé régime permanent ou stationnaire.

3.3.1 Cas particulier où $A(t) = A_0 \cos(\Omega t)$

Calcul de la solution permanente à l'aide de la méthode des nombres complexes

Pour t suffisamment grand, nous pouvons considérer que la solution transitoire s'est annulée et que la solution $x(t)$ s'identifie alors avec la solution particulière : $x(t) \simeq x_P(t)$. Par commodité de notation l'indice p est sous-entendu dans ce qui suit. La méthode des nombres complexes permet de calculer aisément la solution stationnaire.

Soit le déplacement complexe représenté par le nombre complexe $\mathcal{X} = \underline{X} e^{i\Omega t}$, avec $\underline{X} = X_0 e^{i\varphi}$. Nous pouvons considérer, en outre, que $A(t) = A_0 \cos(\Omega t)$ constitue la partie réelle du nombre complexe $\mathcal{A} = A_0 e^{i\Omega t}$. L'équation différentielle se transforme en une simple équation algébrique en fonction de l'amplitude complexe $\underline{X}$:

$$\left[(\omega_0^2 - \Omega^2) + i 2 \delta \Omega \right] \underline{X} = A_0$$

dont la solution est :

$$\underline{X} = \frac{A_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i 2 \delta \Omega}$$

D'où l'on tire l'amplitude X_0 et la phase φ :

$$X_0 = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4 \delta^2 \Omega^2}}$$

$$\varphi = -\arctan \frac{2 \delta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

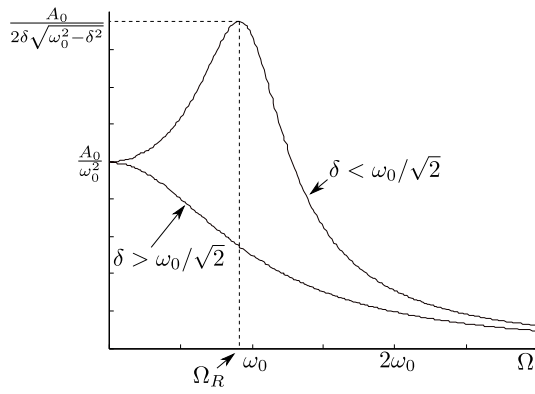
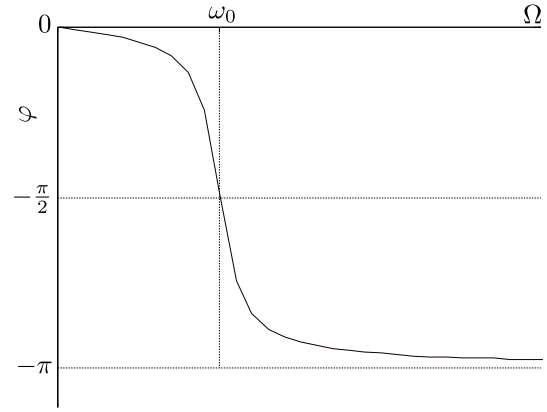
Etude des variations de l'amplitude et de la phase en fonction de la pulsation de l'excitation

Le maximum de l'amplitude est obtenu pour la valeur de Ω qui annule $\frac{dX_0}{d\Omega}$.

Il existe un maximum à la pulsation $\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ seulement si l'amortissement est suffisamment faible pour que $\delta < \omega_0/\sqrt{2}$. A cette pulsation, appelée pulsation de résonance, on dit que le système entre en résonance et l'amplitude X_0 est maximale ; elle vaut :

$$X_{0\max} = \frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

La figure représentant les variations de X_0 en fonction de la pulsation d'excitation Ω est appelée courbe de résonance en amplitude. On remarque qu'à la pulsation ω_0 , le déphasage φ est égal à $-\frac{\pi}{2}$, et qu'à la résonance $\varphi = -\arctan \left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}{\delta} \right)$.

Amplitude X_0 en fonction de Ω .Déphasage φ en fonction de Ω .

Etude de la résonance pour les faibles amortissements

Dans le cas des faibles amortissements ($\delta \ll \omega_0$), la fréquence de résonance est très peu différente de la pulsation propre, $\Omega_R \simeq \omega_0$. Dans ce cas, l'amplitude de vibration à la résonance $X_{0\max}$ est égale à :

$$X_{0\max} = \frac{A_0}{2\delta\omega_0}$$

Pour les faibles amortissements, $X_{0\max}$ est donc inversement proportionnel à δ .

Etude de la vitesse

En notation complexe, la vitesse s'écrit :

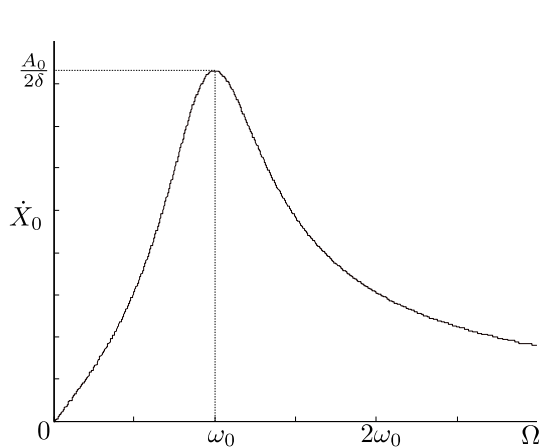
$$\mathcal{V}(t) = \frac{d\mathcal{X}}{dt} = i\Omega\mathcal{X} = \underline{\dot{X}} e^{i\Omega t}$$

où l'amplitude complexe de la vitesse est définie par

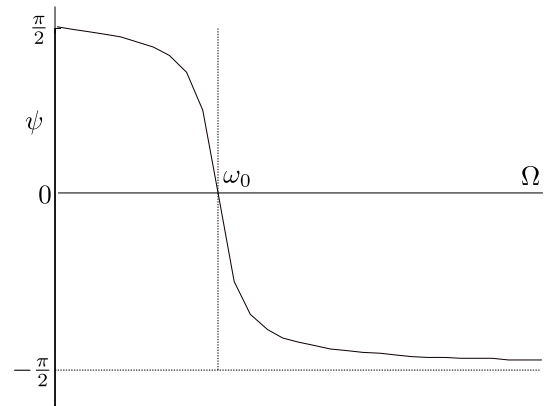
$$\underline{\dot{X}} = i\Omega\underline{X} = \frac{i\Omega A_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i2\delta\Omega}$$

L'étude des variations de l'amplitude de la vitesse en fonction de la pulsation d'excitation montre que, quelle que soit la valeur de δ , la résonance en vitesse est obtenue pour $\Omega = \omega_0$ (voir figure ci-dessous). La valeur maximale de l'amplitude de la vitesse vaut dans ce cas :

$$\dot{X}_{\max} = \dot{X}(\omega_0) = \frac{A_0}{2\delta}$$



Courbe de résonance de la vitesse

Déphasage ψ de la vitesse en fonction de Ω .

Bilan énergétique

Soit $P_F(t)$ la puissance instantanée fournie par la force extérieure $F(t)$ au système. En régime permanent, on obtient :

$$P_F(t) = F(t) \dot{x}(t) = F_0 \dot{X}_0 \cos(\Omega t) \cos(\Omega t + \psi)$$

Soit $\langle P_F \rangle$ la valeur moyenne sur une période de $P_F(t)$:

$$\langle P_F \rangle = \frac{1}{2} F_0 \dot{X}_0 \cos(\psi)$$

En tenant compte de l'expression de $\dot{X}_0$ en fonction de F_0 , on obtient :

$$\langle P_F \rangle = \frac{1}{2} \alpha \dot{X}_0^2$$

Comparons cette valeur à la valeur moyenne $\langle P_D \rangle$ de la puissance dissipée par les forces de frottement de viscosité. La valeur instantanée de cette puissance dissipée s'écrit :

$$P_D(t) = \alpha \dot{x}^2 = \alpha \dot{X}_0^2 \cos^2(\Omega t + \psi)$$

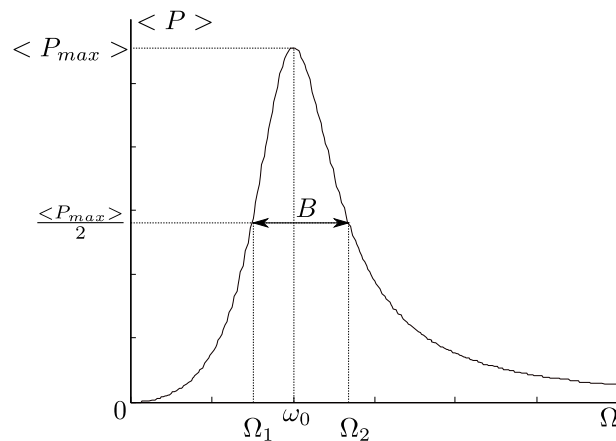
D'où l'on tire la valeur moyenne sur une période :

$$\langle P_D \rangle = \frac{1}{2} \alpha \dot{X}_0^2$$

L'étude des variations de la valeur moyenne de la puissance $\langle P \rangle = \langle P_F \rangle = \langle P_D \rangle$ en fonction de la pulsation d'excitation montre que la valeur maximale de la puissance moyenne est obtenue pour $\Omega = \omega_0$ quelle que soit la valeur de δ . La valeur maximale de la puissance moyenne dissipée ou fournie vaut dans ce cas

$$\langle P \rangle_{\max} = \frac{F_0^2}{2\alpha}$$

La figure ci-dessous représente les variations, en fonction de Ω , de la puissance moyenne dissipée par les forces de frottements (ou de manière équivalente la puissance moyenne fournie par la force extérieure).



Courbe de résonance pour la puissance

Bande passante

On définit par bande passante, la bande des pulsations autour de $\Omega = \omega_0$ pour lesquelles $\langle P \rangle \geq \langle P \rangle_{\max} / 2$. Les deux pulsations Ω_1 et Ω_2 , situées de part et d'autre de la pulsation ω_0 et pour lesquelles $\langle P \rangle = \langle P \rangle_{\max} / 2$, sont appelées pulsations de coupure. La bande passante B s'écrit :

$$B = \Omega_2 - \Omega_1$$

Le calcul de B consiste à rechercher les deux pulsations pour lesquelles $\langle P \rangle = \langle P \rangle_{\max} / 2$. On obtient l'expression de la bande passante B :

$$B = \Omega_2 - \Omega_1 = 2\delta$$

Coefficient de qualité d'un oscillateur

Le coefficient de qualité d'un oscillateur est défini par le rapport de la pulsation propre ω_0 à la largeur de bande B :

$$Q = \frac{\omega_0}{B}$$

3.3.2 Cas d'une excitation périodique

Nous avons étudié dans le paragraphe précédent la réponse d'un système vibratoire à une excitation sinusoïdale dite excitation harmonique. En pratique, les excitations mécaniques ne sont pas toujours parfaitement sinusoïdales ; elles sont souvent périodiques. En considérant le cas d'excitations périodiques, nous procéderons à une généralisation du cas harmonique.

Soit une excitation périodique appliquée à un système amorti à un degré de liberté. L'équation différentielle qui régit ce système s'écrit :

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = A(t)$$

La fonction $A(t)$ étant périodique, de période T , son développement de Fourier s'écrit :

$$A(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

La réponse permanente (ou stationnaire) qui s'identifie avec la solution particulière, pour t suffisamment élevé, peut alors être calculée pour chacune des composantes de l'excitation : $a_0/2$, $a_n \cos(n\omega t)$ et $b_n \sin(n\omega t)$. On obtient alors par superposition :

$$q(t) = \frac{a_0}{2\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(\omega_n t + \psi_n) + b_n \sin(\omega_n t + \psi_n)}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \omega_n^2}}$$

3.4 Impédance mécanique

3.4.1 Définition

Considérons un système mécanique soumis à une force sinusoïdale $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$. En régime permanent, le point d'application de cette force se déplace avec une vitesse $v(t) = V_0 \cos(\Omega t + \phi)$. On appelle impédance mécanique d'entrée du système mécanique, le rapport des amplitudes complexes de la force F et de la vitesse v

$$\underline{Z}_E = \frac{\underline{F}}{\underline{V}}$$

3.4.2 Impédances mécaniques

Amortisseur

Dans le cas d'un amortisseur, la force appliquée est reliée à la vitesse par

$$F = \alpha v$$

On en déduit l'impédance complexe d'un amortisseur

$$\underline{Z}_\alpha = \alpha$$

Masse

Dans le cas d'une masse, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

On en déduit l'impédance complexe d'une masse

$$\underline{Z}_m = im\Omega = m\Omega e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Ressort

Dans le cas d'un ressort de raideur k , la force appliquée f appliquée au ressort s'exprime en fonction de l'allongement par

$$f = k x$$

On en déduit l'impédance complexe d'un ressort

$$\underline{Z}_k = \frac{k}{i\Omega} = -i \frac{k}{\Omega} = \frac{k}{\Omega} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

3.4.3 Puissance

La valeur moyenne, sur une période, de la puissance fournie est

$$\langle P_F \rangle = \frac{1}{2} F_0 \dot{X}_0 \cos(\phi) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{Z}_E) \dot{X}_0^2$$

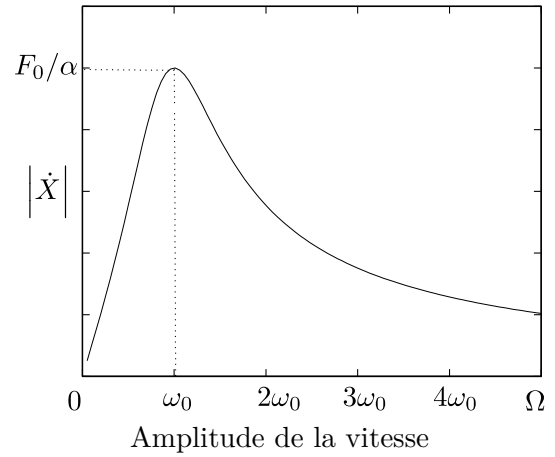
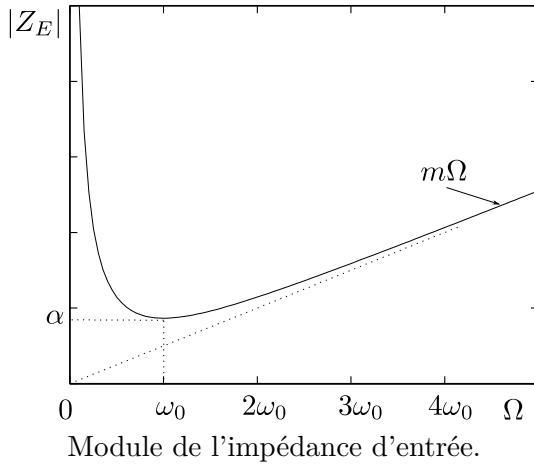
3.4.4 Applications

Système mécanique résonant

Soit un système mécanique constitué d'un ressort de raideur k , d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α et d'une masse m soumise à une force sinusoïdale $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$. L'impédance d'entrée de ce système est

$$\underline{Z}_E = \alpha + i \left(m\Omega - \frac{k}{\Omega} \right)$$

A la résonance $\left(\Omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$, le module de l'impédance est $Z_E = \alpha$. Lorsque la pulsation $\Omega \rightarrow \infty$, l'impédance $\underline{Z}_E \simeq im\Omega$.



Système antirésonant

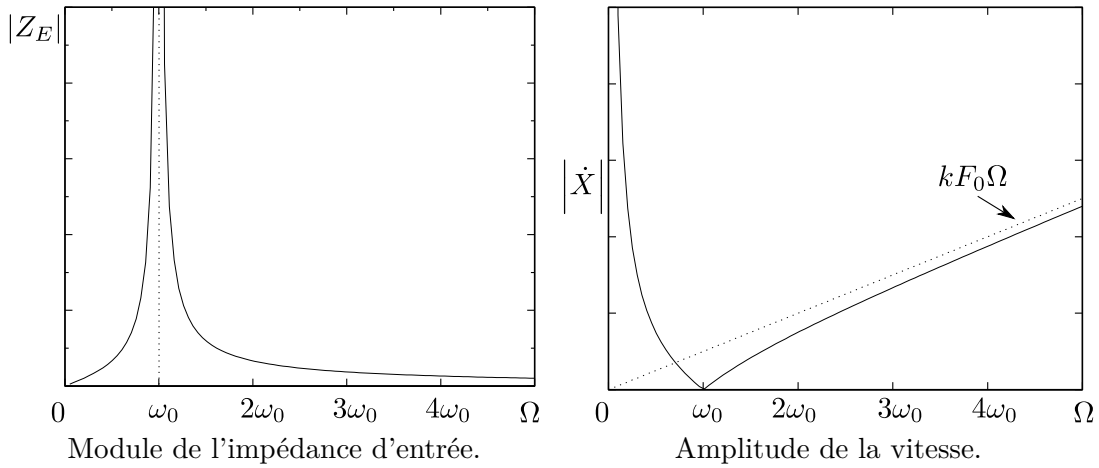
Considérons un système mécanique constitué d'un ressort de raideur k dont une extrémité est reliée à une masse m et dont l'autre est soumise à une force sinusoïdale $F(t)$. Soit x le déplacement de la masse m et soit y le déplacement du point d'application de la force $F(t)$. Pour calculer l'impédance d'entrée de ce système, nous devons d'abord écrire les équations différentielles du mouvement :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= k(x - y) \\ F &= k(x - y) \end{aligned}$$

En utilisant la notation complexe, on obtient l'impédance d'entrée :

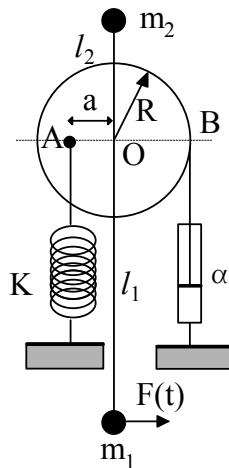
$$\underline{Z}_E = \frac{\underline{F}}{\underline{\dot{Y}}} = -i \frac{km}{\left[m\Omega - \frac{k}{\Omega} \right]}$$

La pulsation d'antirésonance est $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Lorsque $\Omega = \omega_0$, la vitesse $\dot{Y}$ est nulle tandis que le module de l'impédance est ∞ . Lorsque la pulsation $\Omega \rightarrow \infty$, l'impédance $Z_E \rightarrow 0$.



Exercices

Exercice 1 : Un disque circulaire homogène, de masse M , de rayon R , peut osciller sans frottements autour de son axe horizontal O . Deux masses m_1 et m_2 sont soudées aux extrémités d'une tige de masse négligeable liée rigidement au disque et passant par O . Les distances de m_1 et m_2 au centre sont notées respectivement ℓ_1 et ℓ_2 . Un ressort vertical, de constante de raideur K a une extrémité fixe et l'autre est reliée au disque en un point A situé à une distance a de O . En position d'équilibre la tige est verticale avec m_1 en bas et le point A est au même niveau que le centre O . Le disque subit un frottement visqueux de coefficient α au point B . La masse m_1 est soumise à une force $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ perpendiculaire à la tige. *Valeurs numériques :* $M = 1$ kg, $m_1 = m_2 = 0.1$ kg, $K = 16$ N/m, $R = 20$ cm, $\ell_1 = 50$ cm, $\ell_2 = 25$ cm, $a = 10$ cm, $g = 10$ m/s², $\alpha = 7.25 \times 10^{-2}$ kg/s.



1. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
2. Trouver sa solution en régime permanent.
3. Calculer le facteur de qualité Q du système.
4. Déterminer la valeur de F_0 pour qu'à la résonance l'amplitude maximale soit égale à $\pi/30$ rad.

Exercice 2 : (suite de l'exercice n°14 du chapitre précédent) Le bâti B_1 est maintenant animé d'un mouvement vertical sinusoïdal donné par : $s(t) = S_0 \cos(\Omega t)$ où $S_0 = 1$ cm.

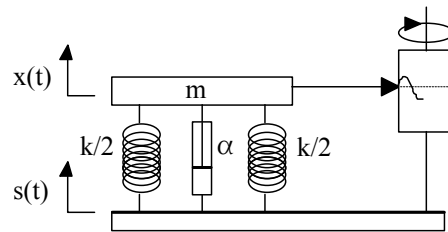
1. Montrer que l'équation différentielle qui régit le mouvement du système peut s'écrire :

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0 \cos(\Omega t)$$

On précisera de manière explicite le terme A_0 . Calculer sa valeur numérique.

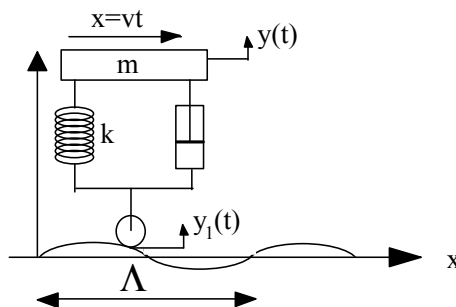
2. Quelle est l'expression de la solution $\theta(t)$ lorsque le régime permanent est établi? Vérifier que le système est très faiblement amorti; en déduire la fréquence de résonance et l'amplitude de $\theta(t)$ à la résonance.
3. Quelle est, à la résonance, l'amplitude de la force F_T transmise au sol par chaque amortisseur?

Exercice 3 : Le dispositif mécanique ci-dessous représente le schéma de principe d'un appareil de mesure de vibrations. La masse m est liée par deux ressorts et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α à un support rigidement lié au système mécanique dont on veut étudier les vibrations. Le mouvement du support est repéré par $s(t)$ tandis que le mouvement de la masse est repéré par $x(t)$. On étudie des vibrations sinusoïdales de la forme $s(t) = S_0 \cos(\Omega t)$. L'origine est prise à la position d'équilibre.



1. Etablir l'équation du mouvement de la masse m en fonction de la coordonnée relative $y(t) = x(t) - s(t)$.
2. Déterminer la solution stationnaire $y(t)$.
3. Dans le cas de ressorts de faible raideur, la pulsation propre ω_0 est petite devant la pulsation Ω . Donner dans ce cas l'expression de $y(t)$. Montrer que l'on peut ainsi déterminer facilement l'amplitude S_0 de la vibration (on a réalisé ainsi un vibromètre).
4. Lorsque la raideur des ressorts est élevée, la pulsation propre ω_0 est grande devant la pulsation Ω des vibrations. Montrer, que dans ce cas on peut déterminer facilement l'accélération du support (on a ainsi réalisé un accéléromètre).

Exercice 4 : Un véhicule roulant est un système complexe à plusieurs degrés de liberté. La figure ci-dessous peut être considérée comme une première approximation d'un véhicule qui se déplace sur une route ondulée décrite par le profil $y_1(t)$.



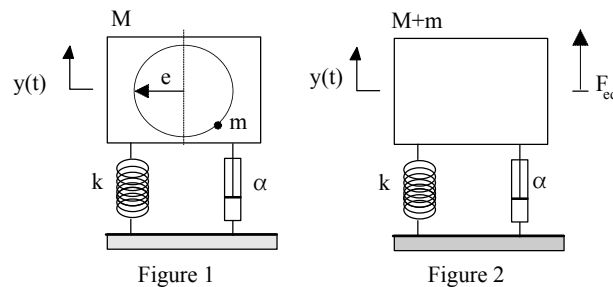
Dans ce modèle simplifié, on suppose que :

- La raideur élastique des pneus est infinie, c'est-à-dire que les ondulations de la route sont intégralement transmises à la suspension du véhicule.

- Les roues ne décollent pas de la chaussée.
 - On s'intéresse uniquement au déplacement vertical $y(t)$ du véhicule dans le plan de la figure.
 - On se place dans le cas simple où le véhicule se déplace horizontalement à une vitesse constante v sur une route à profil sinusoïdal $y_1(x) = Y_1 \sin(2\pi x/\Lambda)$.
1. Etablir l'équation différentielle qui régit les variations au cours du temps de la coordonnée y du véhicule.
 2. En déduire l'amplitude Y du mouvement du véhicule dans le sens vertical .
 3. Application numérique $m = 350$ kg, $k = 350$ kN/m, $v = 100$ km/h, $\Lambda = 5$ m, $Y_1 = 20$ cm ;
 - (a) pour $\alpha = 2000$ N s/m,
 - (b) pour $\alpha = 200$ N s/m.

Exercice 5 : Les machines tournantes (moteurs électriques, turbines, machines à laver, etc...) peuvent être le siège de vibrations importantes car très souvent le centre de masse ne coïncide pas avec l'axe de rotation. Pour limiter ces vibrations on utilise des supports antivibratoires constitués généralement de caoutchouc renforcé. En raison de leurs propriétés mécaniques ces supports peuvent être modélisés par un amortisseur en parallèle avec un ressort.

On se propose d'étudier à titre d'exemple le cas d'une machine à laver le linge (figure 1 ci-dessous). Soit M la masse de cette machine. La partie tournante est constituée d'un tambour de rayon e tournant à une vitesse angulaire constante Ω . On considère que la masse tournante est constituée par le linge de masse m . Pour des raisons de simplicité, on suppose que le lave-linge ne peut effectuer que des mouvements verticaux repérés par la coordonnée y .



1. Etablir l'équation différentielle du mouvement pour la coordonnée y .
2. Montrer qu'un tel dispositif est équivalent au schéma simplifié de la figure 2 ci-dessus ; donner l'expression de F_{eq} .
3. Dans l'hypothèse des faibles amortissements ($\delta \ll \omega_0$), tracer et commenter le graphe de l'amplitude Y du déplacement vertical du lave-linge en fonction de la vitesse de rotation.
4. Calculer l'amplitude de la force transmise au sol à la résonance.

Chapitre 4

Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté

4.1 Introduction

Les systèmes qui nécessitent deux coordonnées indépendantes pour spécifier leurs positions sont appelés systèmes à deux degrés de liberté.

Exemples

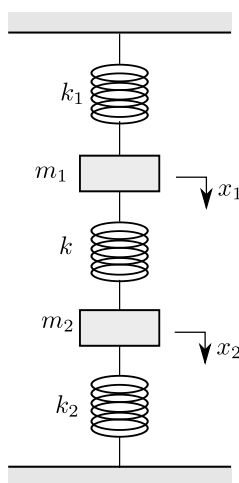


Figure1

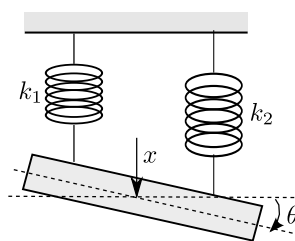


Figure2

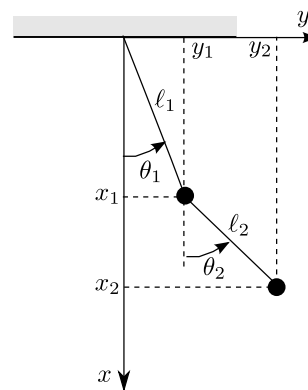


Figure3

- *Figure 1* Si les masses m_1 et m_2 sont astreintes à se déplacer verticalement, 2 coordonnées x_1 et x_2 sont nécessaires pour spécifier la position de chaque masse à chaque instant.
- *Figure 2* Si la masse M est astreinte à se déplacer dans un plan vertical, deux coordonnées sont nécessaires pour spécifier la configuration du système. L'une de ces coordonnées peut être le déplacement x qui correspond à la translation verticale de la masse. L'autre coordonnée peut être le déplacement angulaire θ pour tenir compte de la rotation de la masse. Ces deux coordonnées sont indépendantes l'une de l'autre.
- *Figure 3* Dans le cas du double pendule, deux coordonnées sont nécessaires pour spécifier la position des masses m_1 et m_2 . Plusieurs choix sont pourtant possibles, en effet on peut choisir (x_1, x_2) ou (y_1, y_2) ou (θ_1, θ_2) .

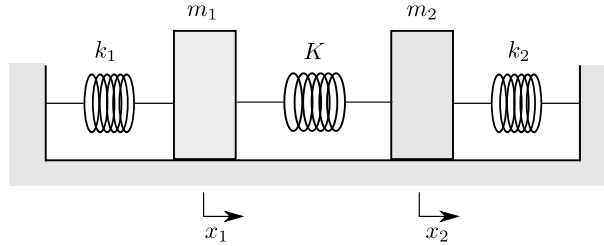
Il est possible de spécifier la configuration d'un système à l'aide de plusieurs ensembles de coordonnées indépendantes ; un ensemble quelconque de ces coordonnées est appelé coordonnées généralisées. Il y a autant d'équations de Lagrange que de degrés de liberté ou de coordonnées généralisées. Pour l'étude des systèmes à deux degrés de liberté, il est nécessaire d'écrire deux

équations différentielles du mouvement que l'on peut obtenir à partir des équations de Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

4.2 Systèmes à deux degrés de liberté

4.2.1 Système masses-ressorts en translation



Système masses-ressorts en translation

Considérons le système ci-dessus, constitué de deux masses m_1 et m_2 reliées respectivement par deux ressorts de raideur k_1 et k_2 à deux bâtis fixes. Les deux masses sont reliées par un ressort de raideur K . Ce ressort est appelé ressort de couplage.

Equations différentielles du mouvement

Les équations du mouvement pour ce système à deux degrés de liberté peuvent être obtenues à partir des équations de Lagrange pour chaque coordonnée $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Soit T et U respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} (k_1 + K) x_1^2 + \frac{1}{2} (k_2 + K) x_2^2 - K x_1 x_2$$

Le lagrangien $\mathcal{L} = T - U$ s'écrit alors

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} (k_1 + K) x_1^2 - \frac{1}{2} (k_2 + K) x_2^2 + K x_1 x_2$$

Les équations de Lagrange s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

D'où le système d'équations différentielles du mouvement

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + K) x_1 - K x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + K) x_2 - K x_1 = 0 \end{cases}$$

Les termes $-K x_2$ et $-K x_1$ qui apparaissent respectivement dans la première et la seconde équation sont appelés termes de couplage, et les deux équations différentielles sont dites couplées.

Résolution des équations différentielles

Recherchons une solution particulière de la forme :

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi)$$

où A_1 , A_2 et ϕ sont des constantes et ω l'une des pulsations propres du système. La substitution de x_1 et x_2 dans le système d'équations différentielles donne

$$\begin{cases} [k_1 + K - m_1 \omega^2] A_1 - K A_2 = 0 \\ -K A_1 + [k_2 + K - m_2 \omega^2] A_2 = 0 \end{cases}$$

Ce qui constitue un système d'équations linéaires homogènes dont les inconnues sont A_1 et A_2 . Ce système admet une solution non identiquement nulle seulement si le déterminant $\Delta(\omega)$ des coefficients de A_1 et A_2 est égal à zéro.

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} [k_1 + K - m_1 \omega^2] & -K \\ -K & [k_2 + K - m_2 \omega^2] \end{vmatrix}$$

Le déterminant $\Delta(\omega)$ est appelé déterminant caractéristique. L'équation $\Delta(\omega) = 0$ est appelée l'équation caractéristique ou équation aux pulsations propres. Elle s'écrit

$$[k_1 + K - m_1 \omega^2] [k_2 + K - m_2 \omega^2] - K^2 = 0$$

ou encore

$$\omega^4 - \omega^2 \left[\frac{k_1 + K}{m_1} + \frac{k_2 + K}{m_2} \right] + \frac{k_1 k_2 + k_1 K + k_2 K}{m_1 m_2} = 0$$

Cette équation est une équation quadratique en ω qui admet deux solutions réelles positives ω_1 et ω_2 appelées les pulsations propres du système.

Cet exemple montre qu'il y a en général deux pulsations propres dans un système à deux degrés de liberté. Chacune des coordonnées, x_1 et x_2 , possède deux composantes harmoniques de pulsations ω_1 et ω_2

$$x_1 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$x_2 = A_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

où A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} , ϕ_1 et ϕ_2 sont des constantes. Le terme de plus basse fréquence correspondant à la pulsation ω_1 est appelé le fondamental. L'autre terme, de pulsation ω_2 , est appelé harmonique.

Les doubles indices sont utilisés pour les amplitudes des différentes composantes harmoniques ; le premier indice se réfère à la coordonnée et le second à la pulsation. Par exemple A_{12} est l'amplitude de $x_1(t)$ à la pulsation ω_2 .

Lorsque $A_{12} = A_{22} = 0$, x_1 et x_2 correspondant à la première solution particulière sont des fonctions sinusoïdales, en phase, de pulsation ω_1 ; on dit que le système oscille dans le premier mode. Dans ce cas

$$x_1 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$x_2 = A_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

Lorsque $A_{11} = A_{21} = 0$, x_1 et x_2 correspondant à la seconde solution particulière et sont des fonctions sinusoïdales, en opposition de phase, de pulsation ω_2 ; on dit que le système oscille dans le second mode. Dans ce cas

$$x_1 = A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$x_2 = A_{22} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Etudions les particularités de ces deux solutions particulières :

– La première solution particulière s'écrit :

$$x_1 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$x_2 = A_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

x_1 et x_2 doivent vérifier le système d'équations différentielles, ce qui donne

$$\begin{cases} [k_1 + K - m_1 \omega_1^2] A_{11} - K A_{21} = 0 \\ -K A_{11} + [k_2 + K - m_2 \omega_1^2] A_{21} = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations permettent d'obtenir le rapport des amplitudes dans le premier mode ou fondamental

$$\mu_1 = \frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{k_1 + K - m_1 \omega_1^2}{K} = \frac{K}{k_2 + K - m_2 \omega_1^2}$$

– La seconde solution particulière s'écrit :

$$x_1 = A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$x_2 = A_{22} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

x_1 et x_2 doivent vérifier le système d'équations différentielles, ce qui donne

$$\begin{cases} [k_1 + K - m_1 \omega_2^2] A_{12} - K A_{22} = 0 \\ -K A_{12} + [k_2 + K - m_2 \omega_2^2] A_{22} = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations permettent d'obtenir le rapport des amplitudes dans le second mode ou harmonique

$$\mu_2 = \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{k_1 + K - m_1 \omega_2^2}{K} = \frac{K}{k_2 + K - m_2 \omega_2^2}$$

– La solution générale (x_1, x_2) est une combinaison linéaire de ces deux solutions particulières. x_1 et x_2 s'écrivent alors

$$x_1 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$x_2 = \mu_1 A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \mu_2 A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

où A_{11} , A_{12} , ϕ_1 et ϕ_2 sont des constantes d'intégration dont les valeurs sont fixées par les conditions initiales.

4.2.2 Cas particulier de deux oscillateurs identiques

Calcul des constantes d'intégration

Considérons le cas particulier de deux oscillateurs identiques tels que $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k$. Dans ce cas les pulsations propres sont respectivement égales à

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2K}{m}} = \omega_1 \sqrt{1 + \frac{2K}{k}}$$

Les rapports d'amplitudes correspondant à ces pulsations sont respectivement $\mu_1 = +1$ et $\mu_2 = -1$.

Soit $x_{10}, x_{20}, \dot{x}_{10}$ et $\dot{x}_{20}$ les valeurs initiales respectives de $x_1, x_2, \dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$. Tenant compte de ces conditions initiales, on obtient le système d'équations suivant qui permet de déterminer les constantes d'intégration A_{11}, A_{12}, ϕ_1 et ϕ_2

$$\begin{aligned} A_{11} \cos(\phi_1) + A_{12} \cos(\phi_2) &= x_{10} \\ A_{11} \cos(\phi_1) - A_{12} \cos(\phi_2) &= x_{20} \\ -\omega_1 A_{11} \sin(\phi_1) - \omega_2 A_{12} \sin(\phi_2) &= \dot{x}_{10} \\ -\omega_1 A_{11} \sin(\phi_1) + \omega_2 A_{12} \sin(\phi_2) &= \dot{x}_{20} \end{aligned}$$

Les solutions de ce système d'équations sont

$$A_{11} = \frac{x_{10} + x_{20}}{2 \cos(\phi_1)} \quad \text{et} \quad A_{12} = \frac{x_{10} - x_{20}}{2 \cos(\phi_2)}$$

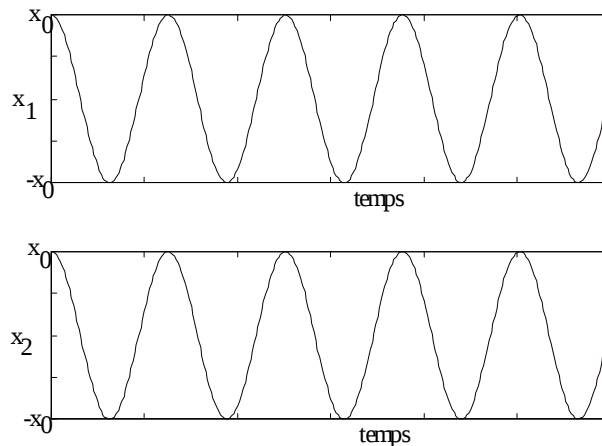
ou encore

$$A_{11} = \frac{\dot{x}_{10} + \dot{x}_{20}}{2 \omega_1 \sin(\phi_1)} \quad \text{et} \quad A_{12} = \frac{\dot{x}_{20} - \dot{x}_{10}}{2 \omega_2 \sin(\phi_2)}$$

1. Considérons le cas particulier suivant $x_{10} = x_{20} = x_0$ et $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$; on obtient dans ce cas $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $A_{12} = 0$ et $A_{11} = x_0$; d'où

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 \cos(\omega_1 t) \\ x_2 &= x_0 \cos(\omega_1 t) \end{aligned}$$

Pour ces conditions initiales particulières, les deux masses oscillent en phase à la même pulsation ω_1 . On dit que le système oscille dans le mode fondamental.

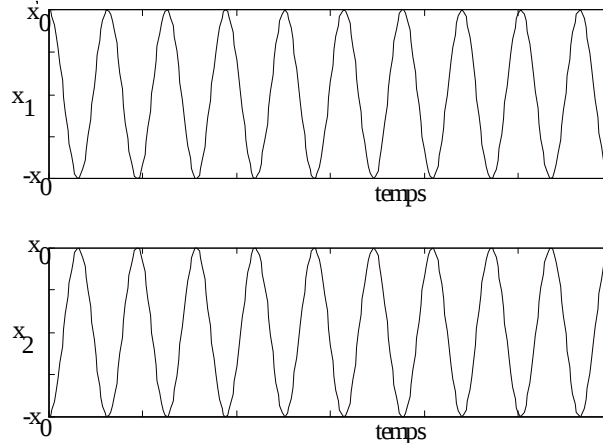


Oscillations dans le mode fondamental

2. Considérons un autre cas particulier pour lequel $x_{10} = -x_{20} = x_0$ et $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$. On obtient dans ce cas $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $A_{11} = 0$ et $A_{12} = x_0$; d'où

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 \cos(\omega_2 t) \\x_2 &= -x_0 \cos(\omega_2 t)\end{aligned}$$

On dit que le système oscille dans le second mode car les deux masses oscillent en opposition de phase avec la même pulsation ω_2 .



Oscillations dans le mode harmonique

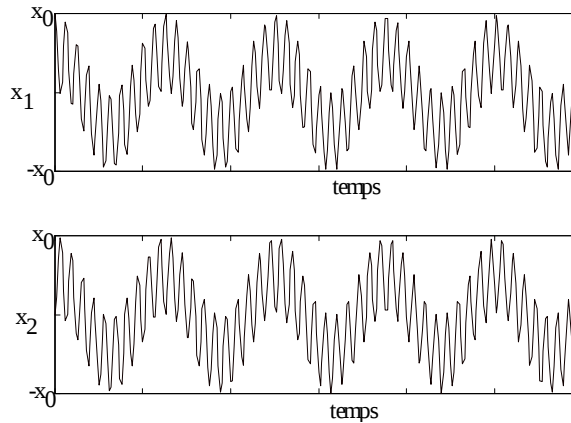
3. Considérons enfin le cas particulier suivant $x_{10} = x_0$, $x_{20} = 0$ et $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$; d'où $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $A_{11} = A_{12} = x_0/2$. Les solutions s'écrivent alors sous la forme

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{x_0}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{x_0}{2} \cos(\omega_2 t) \\x_2(t) &= \frac{x_0}{2} \cos(\omega_1 t) - \frac{x_0}{2} \cos(\omega_2 t)\end{aligned}$$

Les solutions ne sont plus des fonctions purement sinusoïdales du temps mais des combinaisons linéaires de deux fonctions sinusoïdales de pulsations respectives ω_1 et ω_2 . x_1 et x_2 peuvent s'écrire sous la forme

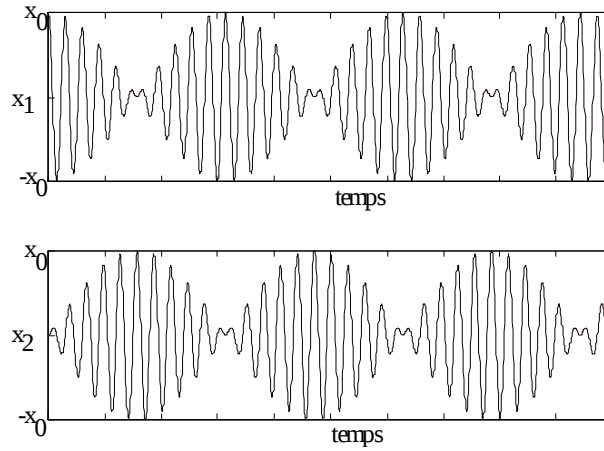
$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \\x_2(t) &= x_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right)\end{aligned}$$

La figure suivante représente le résultat obtenu dans le cas où ω_1 est très différent de ω_2 (c'est-à-dire si $K \gg k$).



Oscillations dans le cas des conditions initiales : $x_{10} = x_0$, $x_{20} = 0$ et $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$

Si ω_1 est peu différent de ω_2 (c'est-à-dire si $K \ll k$), on observe un phénomène de battement (voir figure ci-dessous).



Phénomène de battements

Coordonnées principales

Considérons les coordonnées p_1 et p_2 obtenues à partir des coordonnées x_1 et x_2 par les relations

$$p_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$p_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

Tenant compte des expressions de x_1 et x_2 et des valeurs particulières de μ_1 et μ_2 pour l'exemple étudié, on obtient

$$p_1 = \frac{x_0}{2} \cos(\omega_1 t)$$

$$p_2 = \frac{x_0}{2} \cos(\omega_2 t)$$

On remarque que, quelles que soient les conditions initiales, p_1 et p_2 sont des fonctions purement sinusoïdales du temps de pulsations respectives ω_1 et ω_2 . Ces coordonnées particulières sont appelées coordonnées principales. On peut vérifier que le système d'équations différentielles qui régit le mouvement du système considéré s'écrit sous la forme de deux équations découplées

$$\ddot{p}_1 + \omega_1^2 p_1 = 0$$

$$\ddot{p}_2 + \omega_2^2 p_2 = 0$$

Les relations inverses suivantes

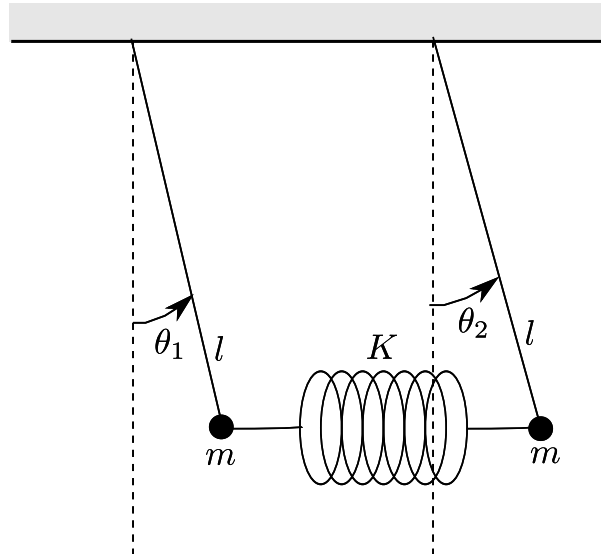
$$x_1 = p_1 + p_2$$

$$x_2 = p_1 - p_2$$

permettent d'obtenir les coordonnées x_1 et x_2 à partir des coordonnées principales p_1 et p_2 .

4.2.3 Pendules couplés

Considérons le cas de deux pendules simples identiques couplés par un ressort de raideur K et qui effectuent des oscillations de faible amplitude repérées par les angles θ_1 et θ_2 .



Pendules couplés

Etablissons tout d'abord les équations différentielles du mouvement dans le cas des oscillations de faible amplitude. Il est aisé de montrer que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle s'écrivent sous les formes quadratiques suivantes

$$T = \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} [Kl^2 + mgl] \theta_1^2 + \frac{1}{2} [Kl^2 + mgl] \theta_2^2 - Kl^2 \theta_1 \theta_2$$

On remarque la présence du terme de couplage $-Kl^2 \theta_1 \theta_2$ dans l'expression de l'énergie potentielle. Comme dans l'exemple précédent, on dit que le couplage est élastique. Si le terme de couplage n'existe que dans l'expression de l'énergie cinétique, on dit que le couplage est de type inertiel.

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les équations différentielles du mouvement

$$ml^2 \ddot{\theta}_1 + [Kl^2 + mgl] \theta_1 - Kl^2 \theta_2 = 0$$

$$-Kl^2 \theta_1 + ml^2 \ddot{\theta}_2 + [Kl^2 + mgl] \theta_2 = 0$$

En l'absence d'amortissement une solution particulière de ce système d'équations différentielles serait

$$\theta_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\theta_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi)$$

Ces deux expressions doivent satisfaire le système d'équations différentielles, d'où

$$[Kl^2 + mgl - ml^2 \omega^2] A_1 - Kl^2 A_2 = 0$$

$$-Kl^2 A_1 + [Kl^2 + mgl - ml^2 \omega^2] A_2 = 0$$

Ce système d'équations admet des solutions non nulles seulement si ω est solution de l'équation aux fréquences

$$\left[Kl^2 + mgl - ml^2\omega^2 \right]^2 - K^2 l^4 = 0$$

D'où l'on tire l'expression des pulsations propres ω_1 et ω_2

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ et } \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{m}}$$

La solution du système d'équations différentielles est donc

$$\theta_1 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\theta_2 = A_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Pour calculer les rapports des amplitudes dans les modes, on suppose que le système oscille soit dans le premier mode soit dans le second mode. Dans le premier mode, on obtient le système

$$[Kl^2 + mgl - ml^2\omega_1^2] - Kl^2\mu_1 = 0$$

$$-Kl^2 + [Kl^2 + mgl - ml^2\omega_1^2] \mu_1 = 0$$

Dans le second mode, on obtient

$$[Kl^2 + mgl - ml^2\omega_2^2] - Kl^2\mu_2 = 0$$

$$-Kl^2 + [Kl^2 + mgl - ml^2\omega_2^2] \mu_2 = 0$$

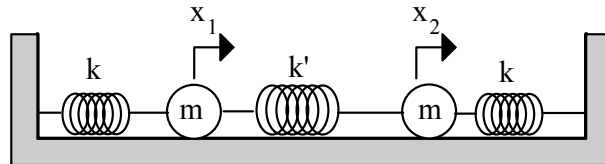
Tenant compte des expressions de ω_1 et ω_2 on obtient les valeurs du rapport des amplitudes dans les modes $\mu_1 = +1$ et $\mu_2 = -1$. Les solutions du système d'équations différentielles s'écrivent alors

$$\theta_1 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\theta_2 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Exercices

Exercice 1 : Soit le système mécanique représenté par la figure ci-contre, composé de deux oscillateurs linéaires (m, k) couplés par un ressort de raideur k' .



1. Ecrire le lagrangien du système.
2. (a) Mettre ce Lagrangien sous la forme :

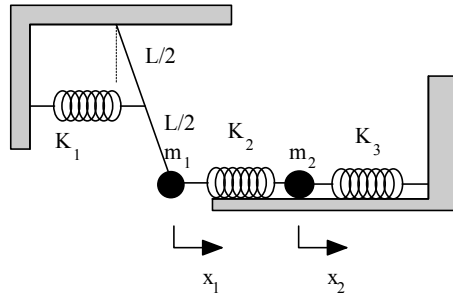
$$L = \frac{1}{2}m \left[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \omega_0^2 (x_1^2 + x_2^2 - 2Cx_1x_2) \right]$$

Donner les expressions de ω_0^2 et C (coefficient de couplage).

- (b) En déduire les équations du mouvement.
3. (a) Déterminer les pulsations propres du système.

- (b) Sachant que $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 0,5$ s et $C = 0,3$, calculer les valeurs numériques des périodes propres.
4. (a) Le coefficient de couplage C étant faible, donner les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ avec les conditions initiales suivantes : à $t = 0$ s, $x_1(0) = X_0$, $\dot{x}_1(0) = 0$ et $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$. Quel phénomène physique observe-t-on ?
- (b) Tracer l'allure des courbes représentatives de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Exercice 2 : Soit le système mécanique représenté figure ci-dessous. Les variables $x_1(t)$ et $x_2(t)$ représentent les déplacements horizontaux (à partir de l'équilibre) des masses m_1 et m_2 dans le cas des petites oscillations. La tige de longueur L est de masse négligeable.

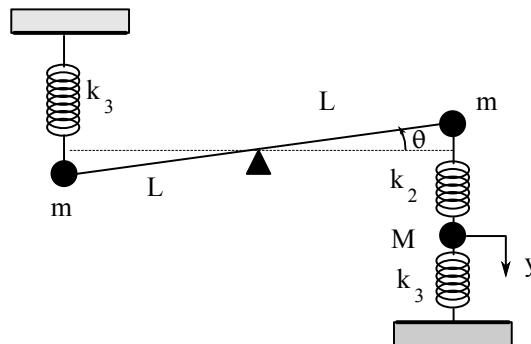


On se place dans le cas où : $K_1 = K_2 = K_3 = k$ et $m_1 = m_2 = m$. On posera :

$$\omega_0^2 = \left(\frac{5k}{4m} + \frac{g}{L} \right) = \frac{2k}{m}$$

1. Calculer les pulsations propres
2. Déterminer les rapports des amplitudes de chacun des modes.
3. En déduire l'expression de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
4. Donner les solutions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ si $x_1(0) = x_0$, $\dot{x}_1(0) = 0$ et $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$

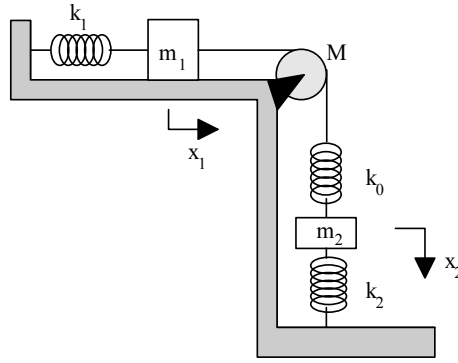
Exercice 3 : Soit le système mécanique suivant comprenant entre autres une barre horizontale de masse négligeable et qui peut pivoter sans frottement autour d'un axe passant par son milieu.



On prendra $M = 2m$ et $k_1 = k_2 = k_3 = k$

1. Etablir les équations régissant les petites oscillations.
2. Trouver les pulsations propres et les rapports des amplitudes pour les différents modes.
3. Ecrire les solutions générales $y(t)$ et $\theta(t)$.

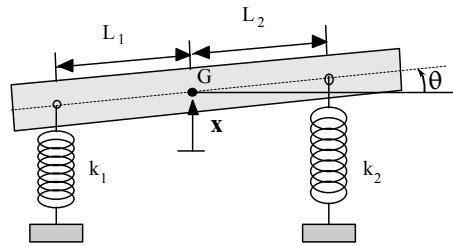
Exercice 4 : Dans la figure ci-dessous, M et R représentent respectivement la masse et le rayon de la poulie. x_1 et x_2 représentent les écarts des deux masses par rapport à leur position d'équilibre.



On prend : $M = 2(m_2 - m_1)$ avec $m_2 = m$, et $k_0 = k_1 = k_2 = k$.

1. Ecrire le Lagrangien du système.
2. Déterminer les pulsations propres et le rapport des amplitudes de chacun des modes en fonction de m et k .

Exercice 5 : Sur la figure ci-dessous, nous avons schématisé un véhicule avec sa suspension (sans amortisseurs). Nous supposons que les ressorts restent verticaux. La masse du véhicule est m et son moment d'inertie par rapport à un axe horizontal D passant par le centre de gravité G et perpendiculaire au plan de la figure est J_0 . Le déplacement du centre de gravité par rapport à l'équilibre est repéré par x (pompage). L'angle θ (tangage) que fait le châssis avec le sol, par rotation autour de D , sera supposé petit. L'inclinaison sur les côtés (roulis) est supposée nulle.



On donne les valeurs suivantes :

- masse du véhicule $m = 1000$ kg,
- distance entre l'axe avant et G : $L_1 = 1$ m,
- distance entre l'axe arrière et G : $L_2 = 1.5$ m,
- constante de raideur du ressort avant : $k_1 = 18$ kN/m,
- constante de raideur du ressort arrière : $k_2 = 18$ kN/m,
- moment d'inertie du véhicule : $J_0 = mr^2$; $r = 0.9$ m.

1. Déterminer les pulsations propres du système ainsi que le rapport des amplitudes dans chacun des modes.
2. Ecrire les solutions $x(t)$ et $\theta(t)$.
3. (a) Quelle condition doit être réalisée si l'on désire avoir un découplage entre x et θ ?
(b) Quelles sont alors les fréquences propres de pompage f_P et de tangage f_T ?

Chapitre 5

Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté

5.1 Equations de Lagrange

Soit un système à deux degrés de liberté, soumis à des forces qui dérivent d'un potentiel, à des forces de frottement de viscosité et à des forces extérieures. Si les coordonnées généralisées sont q_1 et q_2 , les équations de Lagrange s'écrivent :

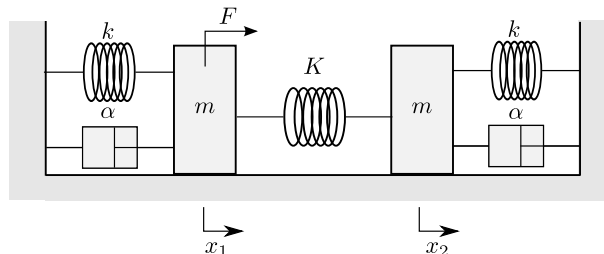
$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_1} = F_{q_1}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_2} = F_{q_2}$$

Dans cette expression F_{q_1} et F_{q_2} sont les forces généralisées conjuguées des coordonnées généralisées respectives q_1 et q_2 . Elles sont respectivement définies par

- $F_{q_1} = \left. \frac{\delta W_1}{\delta q_1} \right|_{\substack{\delta q_1 \neq 0 \\ \delta q_2 = 0}}$, dans cette expression δW_1 représente le travail des forces extérieures pour une variation δq_1 de la coordonnée q_1 , lorsque $\delta q_2 = 0$.
- $F_{q_2} = \left. \frac{\delta W_2}{\delta q_2} \right|_{\substack{\delta q_1 = 0 \\ \delta q_2 \neq 0}}$, dans cette expression δW_2 représente le travail des forces extérieures pour une variation δq_2 de la coordonnée q_2 , lorsque $\delta q_1 = 0$.

5.2 Système masses-ressorts-amortisseurs



Système à deux degrés de liberté en oscillations forcées.

Pour étudier les particularités des oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté, étudions le système symétrique de la figure ci-dessus, soumis à une force horizontale F appliquée à la première masse.

5.2.1 Equations différentielles

Les équations différentielles du mouvement s'écrivent :

$$m\ddot{x}_1 + (k + K)x_1 + \alpha\dot{x}_1 - Kx_2 = F$$

$$-Kx_1 + m\ddot{x}_2 + (k + K)x_2 + \alpha\dot{x}_2 = 0$$

5.2.2 Etude du régime permanent sinusoïdal

Solution permanente

La solution générale de système d'équations différentielles est égale à somme de la solution du système homogène et d'une solution particulière. La solution de l'équation homogène, en raison de l'amortissement, tend vers zéro lorsque le temps augmente. Lorsque le régime permanent s'établit, la solution devient égale à la solution permanente et s'écrit alors :

$$x_1 = X_1 \cos(\Omega t + \phi_1)$$

$$x_2 = X_2 \cos(\Omega t + \phi_2)$$

Pour calculer les amplitudes X_1 et X_2 , ainsi que les phases ϕ_1 et ϕ_2 , utilisons la méthode des nombres complexes. On peut ainsi écrire :

$$x_1 = \text{Re}(\underline{X}_1 e^{i\Omega t}) \quad x_2 = \text{Re}(\underline{X}_2 e^{i\Omega t}) \quad F = \text{Re}(\underline{F} e^{i\Omega t})$$

Dans ces expressions les amplitudes complexes sont définies par

$$\underline{X}_1 = X_1 e^{i\phi_1} \quad \underline{X}_2 = X_2 e^{i\phi_2} \quad \underline{F} = F_0 e^{i0}$$

Dans ce cas les équations différentielles se transforment en équations algébriques :

$$\begin{cases} (k + K - m\Omega^2 + i\alpha\Omega) \underline{X}_1 - K\underline{X}_2 = \underline{F} \\ -K\underline{X}_1 + (k + K - m\Omega^2 + i\alpha\Omega) \underline{X}_2 = 0 \end{cases}$$

Amortissement négligeable

Considérons d'abord le cas d'un amortissement suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que $\alpha \simeq 0$. Le système d'équations différentielles s'écrit alors

$$\begin{cases} (k + K - m\Omega^2) \underline{X}_1 - K\underline{X}_2 = \underline{F} \\ -K\underline{X}_1 + (k + K - m\Omega^2) \underline{X}_2 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont :

$$\underline{X}_1 = \frac{\underline{F}}{m} \frac{(\Omega_A^2 - \Omega^2)}{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)}$$

$$\underline{X}_2 = \frac{K\underline{F}}{m^2} \frac{1}{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)}$$

Les pulsations $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$ sont les pulsations propres calculées au chapitre précédent. La valeur de la pulsation Ω_A est :

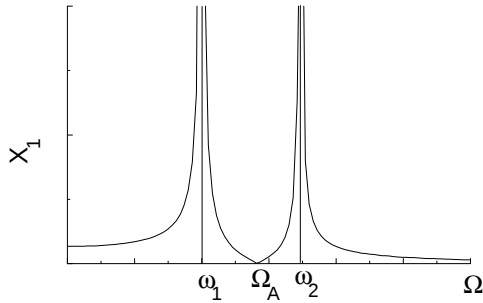
$$\Omega_A = \sqrt{\frac{k+K}{m}}$$

Les amplitudes des déplacements X_1 et X_2 sont alors données par

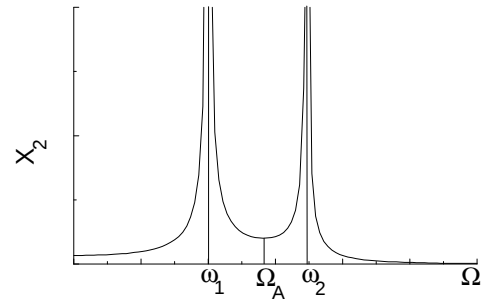
$$X_1 = \frac{F_0}{m} \frac{|\Omega_A^2 - \Omega^2|}{|\omega_1^2 - \Omega^2| |\omega_2^2 - \Omega^2|}$$

$$X_2 = \frac{K F_0}{m^2} \frac{1}{|\omega_1^2 - \Omega^2| |\omega_2^2 - \Omega^2|}$$

Les variations des amplitudes X_1 et X_2 sont représentées sur les figures ci-dessous.



Variation de X_1 en fonction de Ω



Variation de X_2 en fonction de Ω

On remarque que le phénomène de résonance se produit pour X_1 comme pour X_2 lorsque la pulsation d'excitation Ω est égale à l'une des pulsations propres ω_1 ou ω_2 du système. L'amortissement étant très faible, les amplitudes à la résonance sont très importantes. Lorsque la pulsation Ω devient très grande, ces amplitudes tendent vers zéro. Enfin lorsque $\Omega = \Omega_A$, l'amplitude X_1 est égale à zéro ; pour cette raison, la pulsation Ω_A est appelée pulsation d'antirésonance.

5.3 Impédance

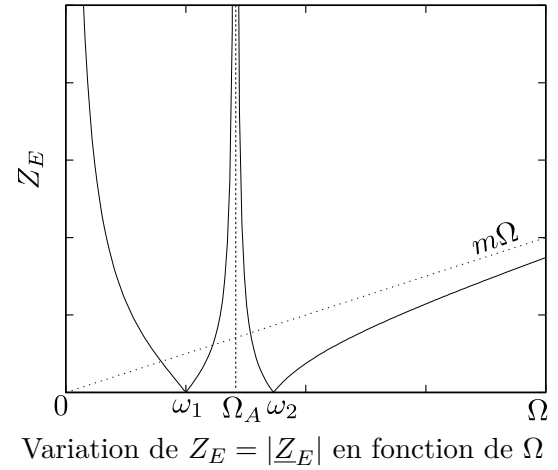
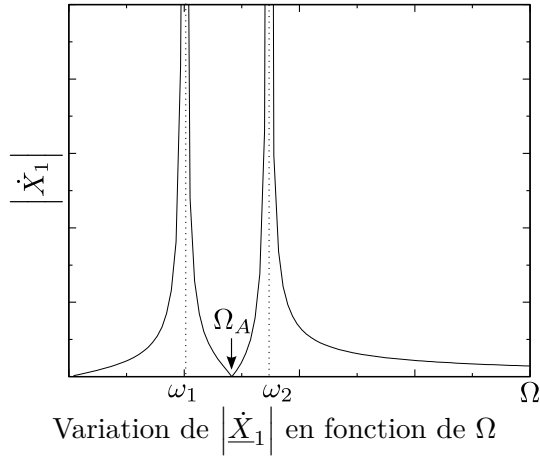
Considérons le système à deux degrés de liberté étudié dans le paragraphe précédent dans lequel nous supposons que l'amortissement est nul ($\alpha \simeq 0$). En régime stationnaire, on obtient pour l'amplitude complexe de la vitesse $\dot{X}_1$:

$$\dot{X}_1 = -i \frac{\Omega}{m} \frac{\Omega^2 - \Omega_A^2}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} F$$

On en déduit l'impédance d'entrée :

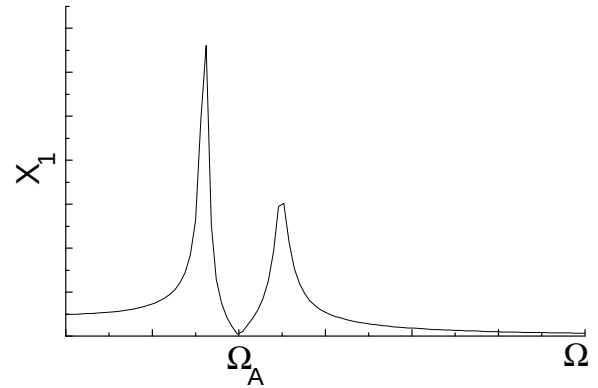
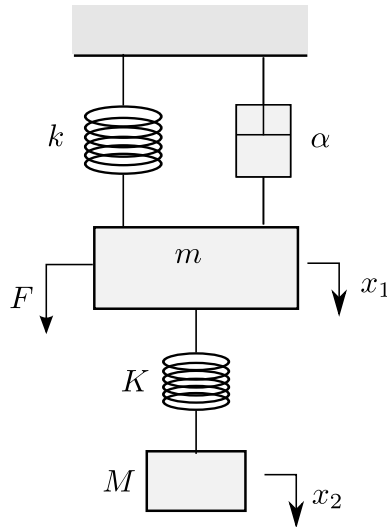
$$Z_E = \frac{F}{\dot{X}_1} = i \frac{m}{\Omega} \frac{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)}{\Omega^2 - \Omega_A^2}$$

Les figures ci-dessous donnent les variations de $\dot{X}$ et Z_E en fonction de Ω . On note le phénomène de résonance lorsque la pulsation d'excitation Ω est égale à l'une des deux pulsations propres ω_1 ou ω_2 . A ces pulsations, le module de l'impédance d'entrée est nul. Enfin, lorsque Ω est égale à la pulsation d'antirésonance Ω_A , la vitesse de la première masse est nulle et le module de l'impédance d'entrée est infini. Lorsque $\Omega \rightarrow \infty$, $Z_E \simeq m\Omega$.



5.4 Application

Le phénomène d'antirésonance peut être avantageusement utilisé pour supprimer une vibration résultant d'une résonance dans un système mécanique.



Considérons le système à deux degrés de liberté de la figure ci-dessus. Les équations différentielles du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + (k + K)x_1 - Kx_2 = F \\ -Kx_1 + m\ddot{x}_2 + Kx_2 = 0 \end{cases}$$

En régime permanent sinusoïdal, on obtient

$$\underline{X}_1 = \frac{F_0}{m} \frac{\Omega^2 - \frac{K}{M}}{\left[-\Omega^4 + \Omega^2 \left(\frac{k+K}{m} + \frac{K}{M}\right) - \frac{kK}{mM}\right] + i\frac{\alpha}{m}\Omega \left(\Omega^2 - \frac{K}{M}\right)}$$

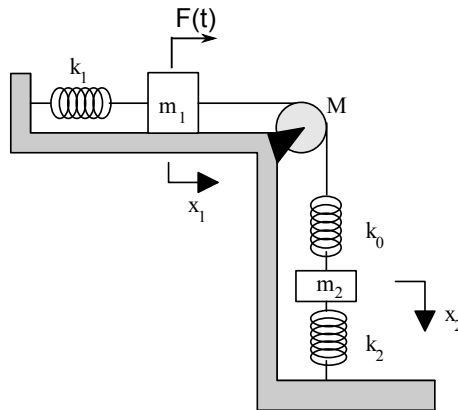
$$\underline{X}_2 = -\frac{KF_0}{Mm} \frac{1}{\left[-\Omega^4 + \Omega^2 \left(\frac{k+K}{m} + \frac{K}{M}\right) - \frac{kK}{mM}\right] + i\frac{\alpha}{m}\Omega \left(\Omega^2 - \frac{K}{M}\right)}$$

Lorsque la pulsation de la force excitatrice est égale à $\Omega_A = \sqrt{\frac{K}{M}}$, la masse m est immobile ($X_1 = 0$).

Si on choisit K et M telles que $\frac{k}{m} = \frac{K}{M}$ (c'est-à-dire telles que $\omega_0 = \Omega_A$), la masse m est immobile lorsque la pulsation excitatrice Ω est égale à $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{K}{M}}$. Dans ces conditions, l'ajout de M et K permet d'annuler la vibration de m à cette pulsation. Un tel dispositif constitue un "étouffeur" dynamique de vibrations.

Exercices

Exercice 1 : Dans la figure ci-dessous, M et R représentent respectivement la masse et le rayon de la poulie, x_1 et x_2 les écarts des deux masses par rapport à leur position d'équilibre. On prend : $M = 2(m_2 - m_1)$ avec $m_2 = m$ et $k_0 = k_1 = k_2 = k$. Le système sera étudié en régime permanent avec : $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$.



1. Calculer l'impédance d'entrée.
2. Calculer les vitesses $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$.
3. (a) A quelle pulsation la masse m_1 reste-t-elle immobile ?
(b) Dans ce cas, quelle est l'amplitude d'oscillation de la masse m_2 ?
4. (a) A quelles pulsations, la vitesse de la masse m_1 est en phase avec la force $F(t)$?
(b) En comparant ces pulsations à celles calculées dans l'exercice 4 du chapitre précédent, déduire le déphasage de $\dot{x}_2$ par rapport à $F(t)$ pour chacune de ces pulsations.

Exercice 2 :

1. Etablir les équations différentielles régissant le fonctionnement des systèmes représentés par les figures 1 et 2.
2. Pour
 - $\omega = \sqrt{5k/4m_1 + g/r}$ et $m_1 = m_2$ pour la figure 1
 - et $\omega = \sqrt{k_2/m}$ avec $m = M/2 + m_2$ pour la figure 2,
 calculer en régime permanent sinusoïdal :
 - (a) l'impédance d'entrée,
 - (b) $\dot{y}_1$, $\dot{y}_2$, y_1 et y_2 .

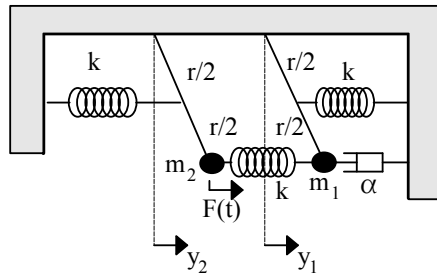


figure 1

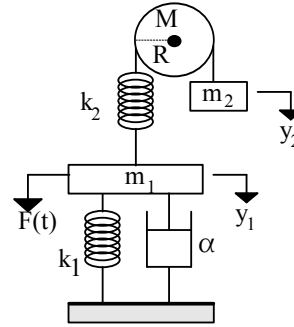


figure 2

Exercice 3 : Pour les systèmes mécaniques des figures 1 et 2 et avec $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ et pour $\omega = \sqrt{k_1/m_1}$, calculer :

1. L'impédance d'entrée ,
2. La puissance instantanée fournie par le générateur mécanique et la puissance instantanée dissipée par le système. Comparer et commenter.
3. La puissance moyenne fournie par le générateur mécanique et la puissance moyenne dissipée par le système. Comparer et commenter.

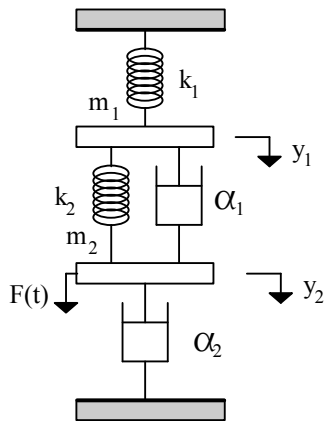


figure 1

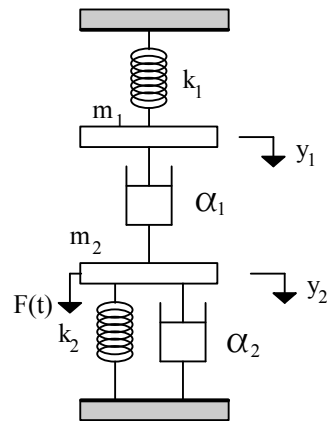


figure 2

Chapitre 6

Généralités sur les phénomènes de propagation

6.1 Propagation à une dimension

6.1.1 Equation de propagation

Dans les phénomènes vibratoires traités dans les chapitres précédents, nous nous sommes intéressés à des phénomènes ou des grandeurs physiques qui dépendaient d'une seule variable, le temps. Nous allons maintenant examiner toute une série de phénomènes qui sont décrits par une fonction qui dépend à la fois du temps t et d'une variable d'espace, x par exemple.

Ces phénomènes sont régis par une équation aux dérivées partielles, appelée équation de d'Alembert ou équation d'onde ou encore équation de propagation à une dimension de la forme :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

dans laquelle V est une grandeur physique qui a les dimensions d'une vitesse et sera appelée dans la suite vitesse de propagation.

6.1.2 Solution de l'équation de propagation

Méthode de d'Alembert

Pour résoudre l'équation des ondes à une dimension, opérons le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned}\eta &= t - \frac{x}{V} \\ \xi &= t + \frac{x}{V}\end{aligned}$$

Calculons les dérivées partielles par rapport à t et x , en fonction des dérivées partielles par rapport à η et ξ .

Sachant que :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = 1$$

et que

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{V}$$

on obtient

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{V} \left[\frac{\partial s}{\partial \eta} - \frac{\partial s}{\partial \xi} \right]$$

En tenant compte de ces résultats et sachant que

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{\partial^2 s}{\partial \xi \partial \eta}$$

on obtient :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 s}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 s}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \left[\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 s}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 s}{\partial \xi^2} \right]$$

En remplaçant dans l'équation d'onde $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$ par les expressions ci-dessus, on obtient l'équation d'onde exprimée en fonction des dérivées partielles par rapport aux variables η et ξ :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta \partial \xi} = 0$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial s}{\partial \eta} \right] = 0$$

Un intégration par rapport à ξ donne :

$$\frac{\partial s}{\partial \eta} = f(\eta)$$

où $f(\eta)$ est une fonction qui ne dépend que de η (et pas de ξ). Enfin une intégration par rapport à η donne :

$$s(\eta, \xi) = F(\eta) + G(\xi)$$

où $F(\eta)$, qui ne dépend que de η , est une primitive de $f(\eta)$. La fonction $G(\xi)$ est une fonction qui ne dépend que de ξ . En revenant aux variables x et t , on obtient la solution générale de l'équation des ondes à une dimension :

$$s(x, t) = F\left(t - \frac{x}{V}\right) + G\left(t + \frac{x}{V}\right)$$

Les fonctions $F\left(t - \frac{x}{V}\right)$ et $G\left(t + \frac{x}{V}\right)$ sont des fonctions dont la nature est fixée par les conditions aux frontières imposées à la solution $s(x, t)$.

Propriétés des solutions particulières $F(t - \frac{x}{V})$ et $G(t + \frac{x}{V})$

Propriétés de $F(t - \frac{x}{V})$ On étudie le cas de la solution particulière $F(t - \frac{x}{V})$. Pour cela on suppose que les conditions aux frontières sont telles que $G(t + \frac{x}{V})$ est constamment nulle. On considère à l'instant t_1 un point d'abscisse x_1 . La valeur de la fonction s en ce point et à cet instant est $s(x_1, t_1)$. On recherche à un instant t_2 postérieur à t_1 ($t_2 > t_1$) la position x_2 d'un point pour lequel la valeur de s est la même que la valeur qu'elle avait en x_1 à l'instant t_1 . Ce problème est formulé par l'égalité suivante :

$$s(x_1, t_1) = s(x_2, t_2)$$

Ce qui se traduit par

$$F\left(t_1 - \frac{x_1}{V}\right) = F\left(t_2 - \frac{x_2}{V}\right)$$

Cette équation est satisfaite si

$$t_1 - \frac{x_1}{V} = t_2 - \frac{x_2}{V}$$

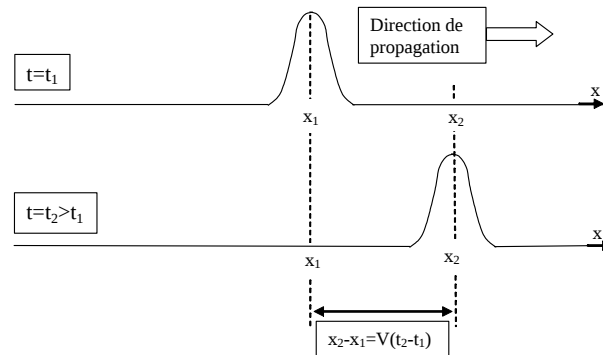
D'où la valeur de x_2 :

$$x_2 = x_1 + V(t_2 - t_1)$$

Comme $t_2 > t_1$, x_2 est supérieure à x_1 et ces deux points sont distants de

$$x_2 - x_1 = V(t_2 - t_1)$$

$F(t - \frac{x}{V})$ correspond à une onde se propageant dans le sens des x croissants (Voir la figure ci-dessous). $F(t - \frac{x}{V})$ est appelée onde progressive et cette expression constituera dans la suite la définition d'une onde progressive.



Onde progressive dans le sens des x croissants : $F(t - \frac{x}{V})$

Propriétés de $G(t + \frac{x}{V})$ On étudie le cas de la solution particulière $G(t + \frac{x}{V})$. Pour cela on suppose que les conditions aux frontières sont telles $F(t - \frac{x}{V})$ est constamment nulle. On considère à l'instant t_1 un point d'abscisse x_1 . La valeur de la fonction s en ce point et à cet instant est $s(x_1, t_1)$. On recherche à un instant t_2 postérieur à t_1 ($t_2 > t_1$) la position x_2 d'un point pour lequel la valeur de s est la même que la valeur en x_1 à l'instant t_1 . Ce problème est formulé par l'égalité suivante :

$$s(x_1, t_1) = s(x_2, t_2)$$

Ce qui se traduit par

$$G\left(t_1 + \frac{x_1}{V}\right) = G\left(t_2 + \frac{x_2}{V}\right)$$

Cette équation est satisfaite si

$$t_1 + \frac{x_1}{V} = t_2 + \frac{x_2}{V}$$

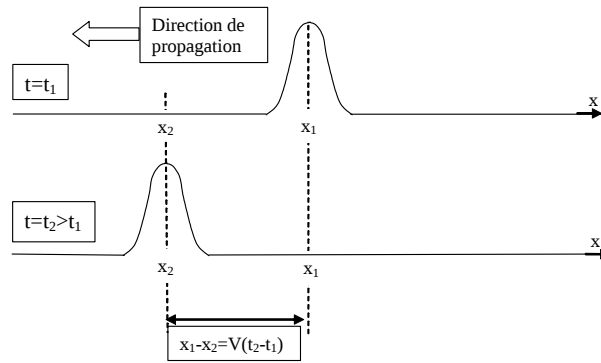
D'où la valeur de x_2 :

$$x_2 = x_1 - V(t_2 - t_1)$$

Comme $t_2 > t_1$, x_2 est inférieure à x_1 . Ces deux points sont distants de

$$x_1 - x_2 = V(t_2 - t_1)$$

$G(t + \frac{x}{V})$ correspond à une onde se propageant dans le sens des x décroissants (Voir la figure ci-dessous).



Onde progressive dans le sens des x décroissants : $G(t + \frac{x}{V})$

6.1.3 Onde progressive sinusoïdale

On considère une onde progressive se propageant dans la direction de l'axe des x , telle que le point d'abscisse $x = 0$ est soumis à une vibration sinusoïdale de la forme

$$s(x = 0, t) = S_0 \cos(\omega t)$$

Le point se trouvant à l'abscisse $x > 0$ aura la même vibration que celle du point $x = 0$ mais avec un retard égal à $\frac{x}{V}$:

$$s(x, t) = S_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{V} \right) \right]$$

Cette expression constitue la définition d'une onde progressive sinusoïdale (ou harmonique) ; elle peut être écrite sous la forme :

$$s(x, t) = S_0 \cos[\omega t - \phi(x)]$$

où $\phi(x) = \frac{\omega}{V}x$ représente le déphasage lié au temps de propagation $\frac{x}{V}$. On dit que $\phi(x)$ représente le déphasage dû à la propagation. L'onde progressive sinusoïdale s'écrit sous la forme suivante qui permet de mettre en évidence la double périodicité (dans le temps et dans l'espace) :

$$s(x, t) = S_0 \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

La quantité $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la période temporelle tandis que la quantité $\lambda = VT$ est la longueur d'onde qui constitue la période spatiale. On peut vérifier aisément que :

$$\begin{aligned} s(x, t + nT) &= s(x, t) \\ s(x + n\lambda, t) &= s(x, t) \end{aligned}$$

où n est un nombre entier.

L'onde progressive s'écrit souvent :

$$s(x, t) = S_0 \cos[\omega t - kx]$$

où $k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}$ est appelé le module du vecteur d'onde qui s'exprime en m^{-1} .

On utilise très souvent la notation complexe d'une onde progressive sinusoïdale :

$$\begin{aligned} s(x, t) &= S_0 e^{i(\omega t - kx)} \\ s(x, t) &= \underline{S} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

où $\underline{S} = S_0 e^{-ikx}$ représente l'amplitude complexe de l'onde progressive sinusoïdale. Le module S_0 de $\underline{S}$ est l'amplitude de l'onde tandis que son argument $-kx$ représente le déphasage dû à la propagation.

6.1.4 Superposition de deux ondes progressives sinusoïdales

Cas de deux ondes de même fréquence se propageant dans le même sens

Considérons deux ondes de même fréquence et de même direction de propagation, d'amplitudes respectives S_1 et S_2 , et de phases respectives ϕ_1 et ϕ_2 . L'onde résultante sera alors :

$$s(x, t) = S_1 e^{i(\omega t - kx + \phi_1)} + S_2 e^{i(\omega t - kx + \phi_2)} = S e^{i(\omega t - kx + \phi)}$$

ou encore en notation réelle :

$$s(x, t) = S \cos(\omega t - kx + \phi)$$

avec

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 S_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

et

$$\phi = \text{Arctg} \left(\frac{S_1 \sin(\phi_1) + S_2 \sin(\phi_2)}{S_1 \cos(\phi_1) + S_2 \cos(\phi_2)} \right)$$

La superposition de deux ondes harmoniques de même fréquence, et qui se propagent dans la même direction, donne une autre onde harmonique progressive de même fréquence, d'amplitude S et de phase ϕ .

Cas de deux ondes de même fréquence se propageant dans des sens opposés

Si par contre, on superpose deux ondes harmoniques de même fréquence mais se propageant dans des sens opposés, le résultat est tout autre. En effet, dans ce cas :

$$s(x, t) = S_1 e^{i(\omega t - kx + \phi_1)} + S_2 e^{i(\omega t + kx + \phi_2)} = \left[S_1 e^{i\phi_1} e^{-ikx} + S_2 e^{i\phi_2} e^{+ikx} \right] e^{i\omega t}$$

et on ne peut plus écrire l'onde résultante sous la forme d'une onde progressive simple. Un cas particulier important se produit quand les deux amplitudes sont identiques. Si on note :

$$S_1 = S_2 = S_0$$

on a :

$$s(x, t) = 2S_0 \cos\left(kx + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) e^{i\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)}$$

et donc en notation réelle :

$$s(x, t) = 2S_0 \cos\left(kx + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$$

Ce mode de vibration est très différent d'une onde progressive puisque tous les points x de la corde vibrent en phase avec des amplitudes différentes. En particulier, il existe une série de points :

$$x_n = \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\phi_1 - \phi_2}{2\pi} \right] \frac{\lambda}{2}$$

avec

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

où l'amplitude de vibration est constamment nulle. On dit dans ce cas que l'onde est stationnaire et que les points x_n sont les nœuds de l'onde. Entre chaque paire de nœuds existe un ventre où l'amplitude de vibration est maximum et égale à $2S_0$. On note aussi que l'intervalle entre deux nœuds est égal à une demi-longueur d'onde $\lambda/2$.

6.1.5 Vitesse de phase

Considérons une onde progressive sinusoidale qui se propage dans le sens des x croissants. Un point d'abscisse x possède, à l'instant t , l'élongation :

$$s(x, t) = S_0 \cos(\omega t - kx)$$

Entre l'instant t et $t + \Delta t$ l'onde progresse d'une quantité Δx . A l'instant $t + \Delta t$, le point d'abscisse $x + \Delta x$ possède la même élongation que celle que possédait le point d'abscisse x à l'instant antérieur t . Ceci se traduit par l'égalité :

$$\begin{aligned} s(x, t) &= s(x + \Delta x, t + \Delta t) \\ S_0 \cos(\omega t - kx) &= S_0 \cos[\omega(t + \Delta t) - k(x + \Delta x)] \end{aligned}$$

Cette égalité est satisfaite si les phases instantanées sont égales :

$$\omega t - kx = \omega(t + \Delta t) - k(x + \Delta x)$$

Soit encore

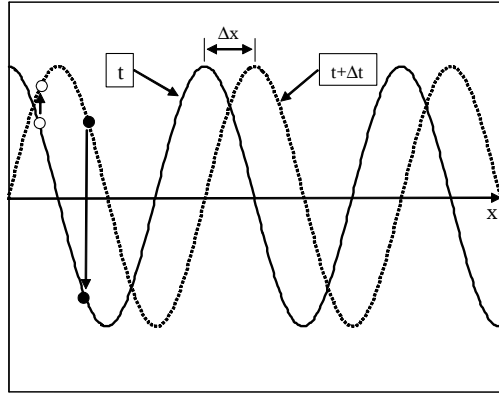
$$\omega \Delta t = k \Delta x$$

On définit la vitesse de phase $V_\phi = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ qui s'exprime en fonction de ω et k par :

$$V_\phi = \frac{\omega}{k}$$

Si la vitesse de phase ne dépend pas de ω , le milieu est dit non dispersif. Dans le cas contraire il est dit dispersif.

La figure ci-dessous permet d'illustrer la notion de vitesse de phase en considérant deux représentations à des instants différents d'une corde parcourue par une onde. La courbe continue représente l'ensemble des points de la corde à l'instant t . Le point de la corde d'abscisse x est représenté par le point blanc, tandis que le point d'abscisse $x + \Delta x$ est représenté par le point noir. On constate qu'entre les instants t et $t + \Delta t$ chacun de ces points suit une trajectoire rectiligne et le déplacement du point noir à l'instant $t + \Delta t$ est égal au déplacement du point blanc à l'instant t . En particulier la crête de la corde, correspondant à une valeur particulière de la phase instantanée, semble se déplacer dans le sens de propagation de l'onde avec la vitesse de V_ϕ mais la trajectoire de chaque point matériel est une trajectoire rectiligne perpendiculaire à la direction de propagation.



Onde progressive sinusoïdale
Trajectoire de deux points $\circ$ et $\bullet$ entre les instants t et $t + \Delta t$

6.1.6 Vitesse de groupe

La vitesse de phase V_ϕ n'est pas nécessairement la vitesse que l'on observe lorsqu'on analyse un mouvement ondulatoire. En général une onde n'est pas parfaitement sinusoïdale mais a une durée limitée et se présente sous la forme d'un train d'onde appelé communément "pulse" ou "groupe" qui se propage avec une vitesse V_G appelée vitesse de groupe. Cette onde sous la forme d'un pulse contient plusieurs fréquences. Si la vitesse de phase est indépendante de la fréquence (Milieu non dispersif) alors toutes les fréquences qui constituent le pulse se propagent à la même vitesse et le pulse se propage avec une vitesse de groupe égale à la vitesse de phase. Mais si le milieu est dispersif (i.e. la vitesse de phase dépend de la fréquence), alors le pulse se propage avec une vitesse de groupe différente de la vitesse de phase.

Pour illustrer ce phénomène, considérons une onde constituée de deux ondes de fréquences différentes et de même amplitude. En $x = 0$, cette onde s'écrit par exemple sous la forme :

$$s(0, t) = S_0 \cos(\omega_1 t) + S_0 \cos(\omega_2 t)$$

Cette onde peut s'écrire encore :

$$s(0, t) = 2S_0 \cos(\omega_B t) \cos(\omega t)$$

où

$$\omega_B = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \text{ et } \omega = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$$

Si ω_1 est voisine de ω_2 , la vibration résultante se présente sous la forme d'une sinusoïde de pulsation ω dont l'amplitude est modulée par un battement de pulsation ω_B (Modulation d'amplitude).

En un point $x > 0$, l'onde obtenue résulte de la superposition de ces deux ondes qui se sont propagées à des vitesses différentes car le milieu de propagation est supposé dispersif :

$$s(x, t) = S_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + S_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

$s(x, t)$ peut s'écrire :

$$s(x, t) = 2S_0 \cos(\omega_B t - k_B x) \cos(\omega t - kx)$$

Dans cette expression :

$$k_B = \frac{k_2 - k_1}{2} \text{ et } k = \frac{k_2 + k_1}{2}$$

L'amplitude du battement se propage à une vitesse qui est la vitesse de groupe définie par la relation :

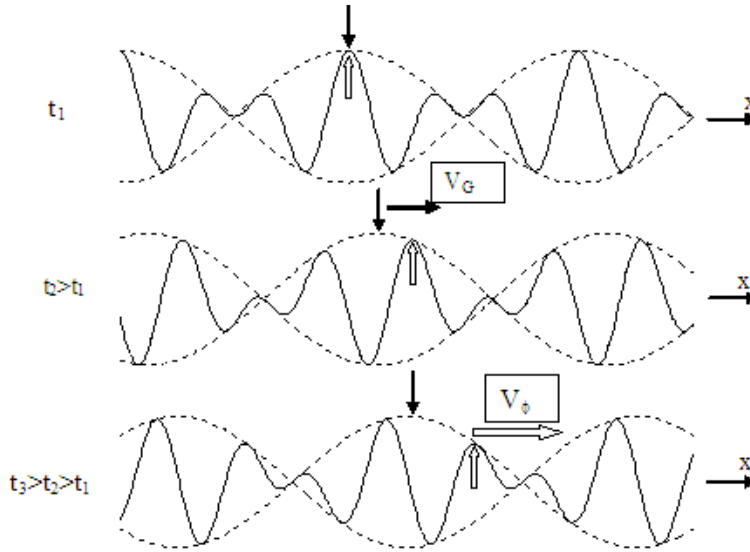
$$V_G = \frac{\omega_B}{k_B} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}$$

Comme k_2 est peu différent de k_1 , la vitesse de groupe est définie par :

$$V_G = \lim_{k_2 \rightarrow k_1} \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{d\omega}{dk}$$

Tandis que la sinusoïde contenue à l'intérieur du battement se propage à la vitesse de phase :

$$V_\phi = \frac{\omega}{k}$$



Propagation d'un paquet d'ondes : Les flèches verticales noires correspondent au maximum des battements qui se propagent à la vitesse de groupe. Les flèches verticales blanches correspondent au maximum des vibrations qui se propagent à la vitesse de phase.

6.1.7 Onde vectorielle

Dans ce qui précède, la quantité $s(x, t)$ représente une grandeur scalaire, mais certains phénomènes décrits par des vecteurs conduisent à des équations similaires :

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

Le vecteur $\vec{A}$, défini dans un milieu à trois dimensions, possède trois composantes A_x , A_y , A_z et l'expression ci-dessus signifie que chacune de ces composantes satisfait individuellement l'équation de propagation :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Chacune de ces composantes A_x , A_y , A_z se propage en $t - \frac{x}{V}$ et $t + \frac{x}{V}$.

6.2 Propagation dans l'espace à trois dimensions

6.2.1 Equation de propagation

Dans un système de coordonnées cartésiennes, l'équation de propagation dans l'espace à trois dimensions s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

On définit le laplacien scalaire de s par l'expression ci-dessous :

$$\Delta s = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

et l'équation des ondes s'écrit sous la forme condensée :

$$\Delta s - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

s est fonction du temps mais également des coordonnées du point M où la fonction s doit être calculée. Si l'on appelle le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, la quantité s dépend du temps et du vecteur position $\vec{r}$; on écrit $s(\vec{r}, t)$.

6.2.2 Onde plane progressive sinusoïdale

Définition

L'onde progressive sinusoïdale (ou harmonique), se propageant dans une direction donnée par un vecteur unitaire $\vec{u}$ est définie par :

$$s(\vec{r}, t) = S_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

où le vecteur $\vec{k} = k \vec{u}$ est appelé le vecteur d'onde. Si les composantes du vecteur $\vec{k}$ sont k_x , k_y et k_z , alors l'onde plane est définie par

$$s(x, y, z, t) = S_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$$

On peut utiliser la notation complexe pour représenter l'onde plane progressive sinusoïdale qui s'écrit dans ce cas sous la forme :

$$s(\vec{r}, t) = S_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Relation de dispersion

En remplaçant $s(\vec{r}, t)$ par son expression dans l'équation de propagation, on obtient la relation $k = k(\omega)$ qui est la condition pour que l'onde plane définie ci-dessus constitue une solution particulière de l'équation d'onde. Cette relation est appelée la relation de dispersion et elle s'écrit :

$$k = \frac{\omega}{V}$$

Surface d'onde

On appelle surface d'onde ou surface équiphase, l'ensemble des points de l'espace pour lesquels, au même instant, $s(\vec{r}, t)$ a la même valeur. Recherchons la surface d'onde passant par un point M_0 à un instant t ; cette surface est l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels l'égalité suivante est satisfaite :

$$s(\vec{r}, t) = s(\vec{r}_0, t)$$

Cette égalité se traduit par :

$$S_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = S_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_0)}$$

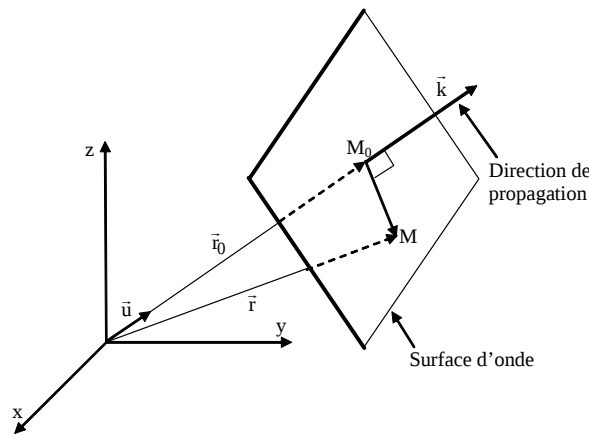
Cette égalité est satisfaite si

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{r}_0$$

Tenant compte des propriétés du produit scalaire, on obtient

$$\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

La surface d'onde passant, à l'instant t , par le point M_0 est l'ensemble des points M satisfaisant l'équation ci-dessus. Cette surface est un plan passant par M_0 , et perpendiculaire à la direction du vecteur d'onde, donc à la direction de propagation. L'onde est dite plane.



Onde plane

Il existe d'autres types d'ondes définis par les surfaces d'onde respectives : par exemple les ondes sphériques pour lesquelles les surfaces d'onde sont des sphères ou les ondes cylindriques pour lesquelles les surfaces d'onde sont des cylindres.

Polarisation

Dans le cas d'une onde plane progressive sinusoïdale représentée par une quantité vectorielle $\vec{A}(\vec{r}, t)$, cette quantité peut avoir différentes orientations par rapport aux surfaces d'ondes :

1. $\vec{A}$ est constamment perpendiculaire à la surface d'onde, ou de manière équivalente parallèle à la direction de propagation : l'onde est dite longitudinale.
2. $\vec{A}$ est contenu dans la surface d'onde, ou de manière équivalente perpendiculaire à la direction de propagation : l'onde est dite transversale. Dans ce cas, l'extrémité du champ vectoriel $\vec{A}$ peut décrire une trajectoire rectiligne : l'onde transversale est dite à polarisation rectiligne. Elle peut décrire une trajectoire circulaire (onde transversale à polarisation circulaire), ou une trajectoire elliptique (onde transversale à polarisation elliptique).

Exercices

Exercice 1 : Vérifier que les fonctions suivantes :

1. $u(x, t) = A \sin(\omega(t - \frac{x}{V}))$
2. $u(x, t) = A \cos(k(x - Vt))$
3. $u(x, t) = \alpha(x + Vt)^2$
4. $u(x, t) = A \exp(i\omega(t - \frac{x}{V}))$
5. $u(x, t) = A \exp(i\omega(t + \frac{x}{V}))$
6. $u(x, t) = A \exp(i\omega(t - \frac{x}{V})) + B \exp(i\omega(t + \frac{x}{V}))$

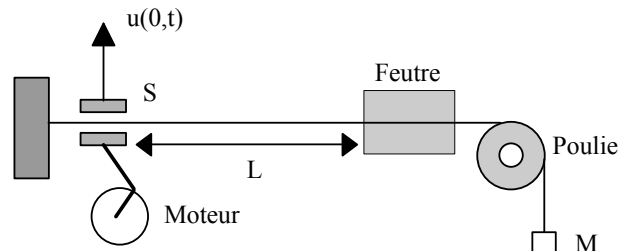
sont solutions de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

où x , t et V représentent respectivement la position, le temps et la vitesse de propagation. Déterminer les dimensions des constantes A , ω , k et α .

Exercice 2 : On étudie la propagation d'un ébranlement transversal sur une corde. Cet ébranlement se propage dans le sens des x croissants avec une vitesse V . A l'instant $t = 0$ s, la forme de la corde est donnée par : $u(x, 0) = Ae^{-\alpha x^2}$. Donner l'expression de la forme $u(x, t)$ de la corde à un instant t . Représenter graphiquement cette corde aux instants $t = 0$ s, et $t = 0.3$ s pour : $A = 1$ cm, $\alpha = 0.5 \text{ cm}^{-2}$, $V = 20 \text{ cm.s}^{-1}$.

Exercice 3 : Le dispositif représenté sur la figure ci-dessous permet de communiquer à l'extrémité S d'une corde tendue horizontalement, une vibration verticale sinusoïdale entretenue : $u(0, t) = 5 \sin(\omega t)$ (en cm)



1. La longueur totale de la corde est $L = 5$ m et sa masse est $m = 100$ g. Sachant que la vitesse de propagation des ondes transversales dans une corde de masse linéique μ et tendue par une tension T est donnée par : $V = \sqrt{T/\mu}$, quelle doit être la valeur de la masse M qui tend la corde pour que la longueur d'onde des vibrations transversales de pulsation soit $\lambda = 1$ m lorsque le moteur tourne à la vitesse de 3600 tr/mn.
2. Juste avant la poulie, la corde est pressée à frottement doux entre deux plaques de feutre, empêchant toute réflexion de se produire.
 - (a) Ecrire l'expression en fonction du temps de l'élongation $u(x, t)$ du point A tel que $SA = x$.
 - (b) Donner les abscisses des points qui vibrent en phase avec S et de ceux qui vibrent en opposition de phase avec S .
 - (c) Représenter sur un même graphique le mouvement de S entre les instants $t = 0$ et $t = 1/30$ s et le mouvement du point A tel que $x = 2,75$ m.
 - (d) Représenter l'aspect de la corde sur un même graphique aux instants $t = 0$ et $t = 1/600$ s, entre $x = 0$ et $x = 4$ m.

Chapitre 7

Cordes vibrantes

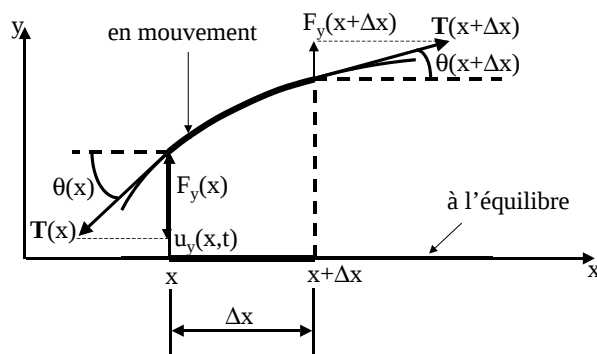
7.1 Equation des ondes

Considérons une corde tendue, rectiligne selon la coordonnée x , et de longueur infinie. Nous allons étudier la propagation d'un faible ébranlement le long de la corde. Supposons que cet ébranlement se produise suivant l'axe Oy .

Etudions l'équation du mouvement de cette corde. Nous dénoterons par T la tension à laquelle est soumise la corde. On considère en un point d'abscisse x un segment très court de cette corde, de longueur Δx . La masse Δm du segment est donnée par :

$$\Delta m = \mu \Delta x$$

où μ est la densité linéique de masse de la corde, c'est-à-dire la masse par unité de longueur qui s'exprime en kg/m.



Corde vibrant transversalement.

Dans une situation hors équilibre, le segment n'est plus droit, il présente une courbure. Nous considérons des mouvements d'oscillation de la corde de petite amplitude

$$\vec{u}(x, t) = u(x, t) \vec{e}_y$$

si bien que nous pouvons faire l'approximation :

$$\sin(\theta)|_x = \tan(\theta)|_x = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x$$

$$\sin(\theta)|_{x+\Delta x} = \tan(\theta)|_{x+\Delta x} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}$$

Cette approximation néglige aussi l'allongement du segment, et considère donc la tension T comme constante. La force appliquée sur le segment dans la direction y est la résultante de la force appliquée au point x , qui est une force appliquée vers le bas et égale en module à

$$F(x, t) = T \sin(\theta)|_x \cong T \tan(\theta)|_x = T \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x$$

et de la force appliquée au point $x+\Delta x$ qui est vers le haut et égale à

$$F(x + \Delta x, t) = T \sin(\theta)|_{x+\Delta x} \cong T \tan(\theta)|_{x+\Delta x} = T \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}$$

La force totale dans la direction y est donc :

$$R = F(x + \Delta x, t) - F(x, t) = T \left[\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x \right] = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x$$

Nous pouvons appliquer maintenant la loi fondamentale de la dynamique au segment Δx . La force dans la direction y doit être égale au produit de la masse Δm du segment par l'accélération de celui-ci. Donc :

$$R = \Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Si on définit $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ qui a la dimension d'une vitesse, on constate que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

qui est l'équation d'onde de la corde. V est la vitesse de propagation de cette onde.

7.2 Ondes progressives harmoniques

7.2.1 Définition

Une onde progressive harmonique se propageant selon Ox est définie par :

$$u(x, t) = U_0 \cos(\omega t - kx)$$

ou encore en notation complexe

$$u(x, t) = U_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

où $k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le module du vecteur d'onde, λ étant la longueur d'onde.

7.2.2 Force en un point

On appelle force en un point, la projection selon Oy de la force exercée, en ce point, par la partie gauche de la corde sur la partie droite :

$$F = -T \frac{\partial u}{\partial x}$$

Dans le cas d'une onde progressive sinusoïdale, cette relation devient :

$$F(x, t) = ikT U_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

La vitesse de particules s'écrit :

$$\dot{u}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} = i\omega U_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

On constate que pour une onde progressive la vitesse de particules $\dot{u}$ est en phase avec la force F .

7.2.3 Impédance

On appelle impédance en un point le rapport de l'amplitude complexe de la force à l'amplitude complexe de la vitesse de particule

$$Z(x) = \frac{F_y}{\dot{u}_y}$$

Dans le cas d'une onde progressive, on obtient :

$$Z(x) = \mu V = \sqrt{\mu T}$$

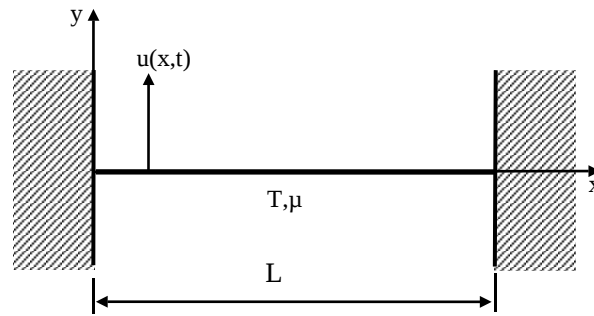
La quantité $\sqrt{\mu T}$ définit l'impédance caractéristique de la corde

$$Z_c = \sqrt{\mu T} = \mu V$$

On obtient une propriété de l'onde progressive plane

$$Z(x) = Z_c \quad \forall x$$

7.3 Oscillations libres d'une corde de longueur finie



Corde de longueur L fixée aux extrémités

Considérons une corde de longueur L fixe aux points $x = 0$ et $x = L$. Recherchons une solution de l'équation d'onde sous la forme :

$$u(x, t) = g(x) f(t)$$

En remplaçant dans l'équation de propagation, on obtient :

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{1}{V^2} \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dt^2}$$

Le membre de gauche de cette équation ne dépend que de x , tandis que le membre de droite ne dépend que de t . Ces deux expressions sont donc égales à une constante qui doit être un nombre réel négatif que nous posons égal à $-k^2$ car la solution ne doit pas tendre vers l'infini lorsque t tend vers l'infini. Posons $\omega = kV$. On en déduit que :

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = -k^2 g$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -\omega^2 f$$

Les solutions de ces deux équations différentielles sont de la forme :

$$f = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$g = C \cos(kx) + D \sin(kx)$$

La solution de l'équation d'onde peut alors s'écrire sous la forme :

$$u(x, t) = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] [C \cos(kx) + D \sin(kx)]$$

Tenant compte des conditions aux limites

$$u(0, t) = 0$$

$$u(L, t) = 0$$

on obtient

$$C = 0$$

$$k = n \frac{\pi}{L} \text{ où } n = 0, 1, 2, \dots$$

La solution de l'équation d'onde qui satisfait ces conditions aux limites est donc la somme d'une infinité de termes :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x)$$

avec

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \text{ et } \omega_n = k_n V = n \frac{\pi V}{L}$$

Les ω_n sont les pulsations propres. Les coefficients a_n et b_n sont déterminés par les conditions initiales du mouvement. Supposons qu'à $t = 0$ nous imposons à la corde une certaine forme initiale $u(x, 0) = u_0(x)$ et une vitesse initiale

$$\dot{u}(0, x) = v_0(x)$$

Dans ce cas nous aurons les conditions initiales suivantes :

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(k_n x)$$

$$v_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\omega_n b_n \sin(k_n x)$$

On doit inverser ces équations pour obtenir les coefficients a_n et b_n . La méthode de Fourier consiste à les multiplier par $\sin(k_m x)$ et les intégrer entre 0 et L . Si on utilise les intégrales :

$$\int_0^L \sin\left(m \frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{L}{2} & \text{si } m = n \end{cases}$$

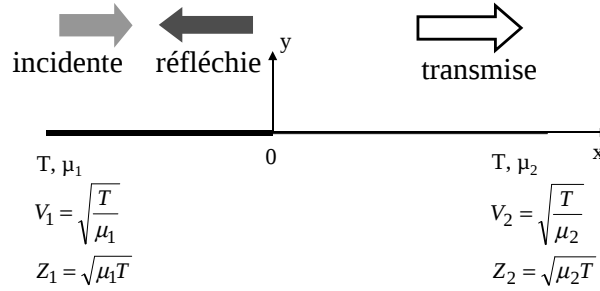
on obtient

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = -\frac{2}{\omega_n L} \int_0^L v_0(x) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx$$

7.4 Réflexion et transmission

7.4.1 Réflexion et transmission entre deux cordes semi-infinies



Réflexion transmission dans deux cordes semi-infinies

Soit deux cordes de longueur semi-infinie, reliées en $x = 0$. Leurs masses linéiques sont respectivement μ_1 et μ_2 . Lorsqu'une onde venant de $-\infty$ se propage vers $x = 0$ dans la première corde, elle donne naissance au point de jonction, $x = 0$, à une onde réfléchie et une onde transmise. L'écriture de la continuité du déplacement et de la force en $x = 0$ permet d'obtenir le coefficient de réflexion R_u et le coefficient de transmission T_u définis respectivement par :

$$R_u = \frac{U_R}{U_i}$$

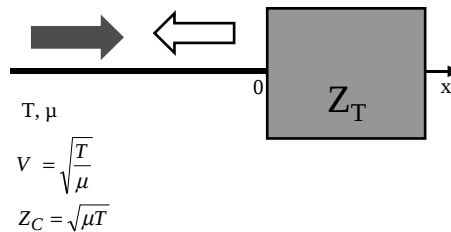
$$T_u = \frac{U_T}{U_i}$$

où U_i , U_R et U_T sont les amplitudes des déplacements associés respectivement à l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde transmise. On en déduit :

$$R_u = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$T_u = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

7.4.2 Réflexion sur une impédance quelconque



Corde semi-infinie terminée par une impédance Z_T

Soit une corde de longueur semi-infinie, de masse linéique μ , tendue horizontalement avec une tension T et terminée en $x = 0$ par une impédance mécanique Z_T . Lorsqu'une onde harmonique se propage dans la corde de $-\infty$ vers $x = 0$, elle subit une réflexion en ce point. Sachant que le déplacement de particules s'écrit :

$$u(x, t) = U_i e^{i(\omega t - kx)} + U_R e^{i(\omega t + kx)}$$

on en déduit la vitesse de particules et la force en un point d'abscisse x

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = i\omega [U_i e^{i(\omega t - kx)} + U_R e^{i(\omega t + kx)}]$$

$$F = -T \frac{\partial u}{\partial x} = -ikT [U_i e^{i(\omega t - kx)} - U_R e^{i(\omega t + kx)}]$$

En $x = 0$, les conditions aux limites s'écrivent :

$$Z_T = \frac{F(0, t)}{\dot{u}(0, t)}$$

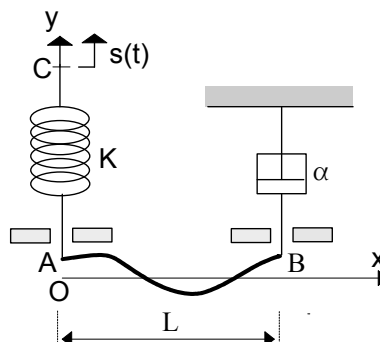
On en déduit le coefficient de réflexion R_u en fonction de l'impédance caractéristique Z_c et de l'impédance Z_T placée à l'extrémité de la corde :

$$R_u = \frac{U_R}{U_i} = \frac{Z_c - Z_T}{Z_c + Z_T}$$

Exercices

Exercice 1 : Soit une corde de longueur $L = 2$ m, de masse totale $m = 80$ g et soumise à une tension T réglable. Comme indiqué sur la figure ci-dessous, elle est fixée en A , à un ressort vertical de raideur K dont l'extrémité C subit un déplacement forcé vertical sinusoïdal de fréquence $f = 50$ Hz, d'amplitude $s_0 = 1$ cm et décrit par : $s(t) = s_0 e^{i2\pi f t}$

La seconde extrémité $B(x = L)$ de la corde est fixée à un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α égal à $0,2$ N.s/m. Des guides parfaitement glissants n'autorisent que les mouvements verticaux (transverses) des points A , B et C . Le mouvement d'un point M quelconque d'abscisse x sur la corde est alors représenté par son élongation $u_y(x, t)$. La tension T est réglée de telle sorte qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie en B .



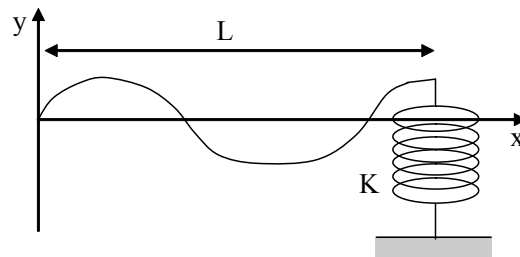
1. Que représente l'amortisseur par rapport à la corde ? Calculer l'impédance en un point quelconque de la corde. En déduire la tension T de la corde.
2. En déduire la vitesse de phase V et la longueur d'onde.
3. Montrer que les extrémités A et B vibrent en phase.

4. Quelle est la valeur de l'impédance de la corde au point A . Calculer l'amplitude et la phase φ de l'élongation $u_y(x, t)$ du point A . En déduire l'expression de l'élongation $u_y(x, t)$ d'un point quelconque de la corde. Dans quel cas la phase φ est nulle ? Que vaut, dans ce cas, l'amplitude de vibration de chaque point de la corde ?

Exercice 2 : Soit deux cordes de longueur semi-infinie reliées en $x = 0$. La corde qui s'étend de $-\infty$ à 0 a une densité linéique μ_1 . La seconde corde qui s'étend de 0 à $+\infty$ a une densité linéique $\mu_2 = 0.25 \mu_1$. Lorsqu'une onde incidente sinusoïdale se propage de $-\infty$ dans le sens des x positifs, elle subit une réflexion partielle en $x = 0$. L'amplitude de l'onde incidente est U_0 et sa pulsation est ω .

1. Calculer le coefficient de réflexion en $x = 0$.
2. Montrer que l'onde résultante dans la première corde a une amplitude qui varie entre deux valeurs extrêmes U_{max} et U_{min} .
 - (a) Donner l'expression de U_{max} en fonction de U_0 et calculer la position des maxima en fonction de la longueur d'onde λ .
 - (b) Donner l'expression de U_{min} en fonction de U_0 et calculer la position des minima en fonction de la longueur d'onde.
 - (c) Calculer le taux d'ondes stationnaires.

Exercice 3 : Une corde de longueur L est tendue entre deux points situés respectivement en $x = 0$ et $x = L$. Le point situé en $x = 0$ est fixe et le point situé en $x = L$ est relié à un ressort de raideur K . La tension de la corde est T . La corde est horizontale à l'équilibre et on pourra négliger son poids. On étudie les ondes transverses stationnaires sinusoïdales de pulsation ω . La vitesse de propagation est V .

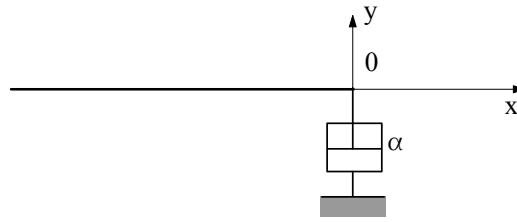


1. Ecrire le déplacement $u_y(x, t)$ en un point quelconque d'abscisse x et à l'instant t .
2. En écrivant la condition limite pour $x = 0$, montrer que $u_y(x, t)$ peut se mettre sous la forme : $u_y(x, t) = A e^{i\omega t} f(x)$; où $f(x)$ est une fonction que l'on explicitera.
3. Ecrire la condition aux limites en $x = L$.
4. Montrer que les pulsations propres doivent vérifier la condition : $tg\left(\frac{\omega L}{V}\right) = C \frac{\omega L}{V}$ où C est une constante que l'on précisera. Proposer une méthode de résolution de cette équation.
5. Déterminer les trois premières pulsations propres ω_1 , ω_2 et ω_3 dans le cas où $\frac{T}{KL} \rightarrow \infty$.

Exercice 4 : On considère une corde homogène de masse par unité de longueur μ tendue horizontalement avec une tension T très grande devant le poids de la corde. La corde de longueur infinie est terminée en $x = 0$ par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α . Une onde incidente transversale arrive de $-\infty$ et se propage dans la corde dans le sens des x croissants. Cette onde correspond à un déplacement transversal donné par :

$$u_i(x, t) = U_i e^{i(\omega t - kx)}$$

où k représente le module du vecteur d'onde.



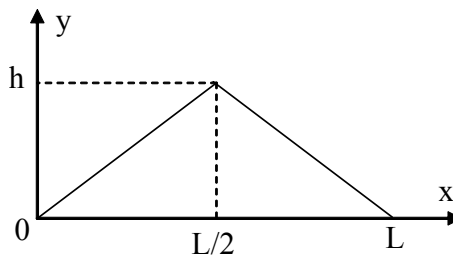
1. Donner l'expression du coefficient de réflexion R en amplitude de déplacement en $x = 0$. Quel est le module et l'argument de R dans le cas particulier où $\alpha \leq \sqrt{\mu T}$?
2. Ecrire l'expression du déplacement résultant $u(x, t)$, en chaque point de la corde, en fonction des données du problème et du coefficient de réflexion R .
3. Montrer que le déplacement résultant en chaque point de la corde peut alors s'écrire sous la forme de la somme d'une onde progressive et d'une onde stationnaire et qu'il s'écrit sous la forme :

$$u(x, t) = U_p e^{i(\omega t - kx)} + U(x) e^{i\omega t}$$

U_p et $U(x)$ sont deux nombres réels qui représentent respectivement l'amplitude de l'onde progressive et l'amplitude de l'onde stationnaire. Calculer l'amplitude U_p en fonction de R et U_i , ainsi que l'amplitude $U(x)$ en fonction de R , U_i , k et x .

4. Que devient $u(x, t)$ dans les cas particuliers suivants :
 - (a) $\alpha = \sqrt{\mu T}$,
 - (b) $\alpha = 0$.

Exercice 5 : Une corde de longueur L et de masse m est tendue entre deux points fixes avec une tension T . A l'instant $t = 0$, la corde est pincée en son milieu, écartée par rapport à l'horizontale d'une distance h puis lâchée sans vitesse initiale. Les positions $u(x, 0)$ des différents points de la corde, à l'instant $t = 0$, sont représentées sur la figure ci-dessous. Etablir l'expression de $u(x, t)$.

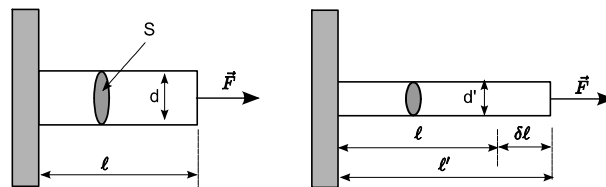


Chapitre 8

Ondes élastiques dans les solides

8.1 Propriétés élastiques des solides

8.1.1 Déformation

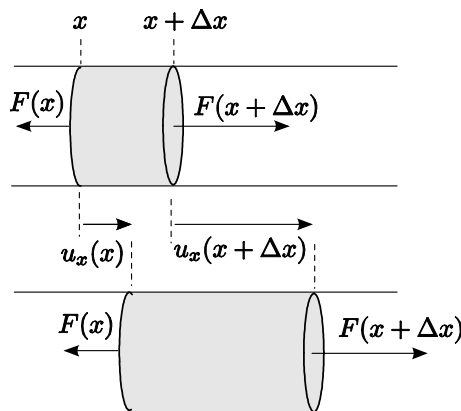


Allongement d'un barreau sous l'action d'une force de traction.

Soit un solide déformable, continu et isotrope, sous la forme d'un barreau rectiligne de faible section, c'est-à-dire dont les dimensions latérales sont faibles devant sa longueur ℓ , dont une extrémité est fixée sur un support rigide fixe. Sous l'action d'une force de traction F appliquée à l'extrémité libre, le fil s'allonge. La déformation persiste tant que la traction est maintenue. L'allongement relatif est :

$$\frac{\delta \ell}{\ell} = \frac{\ell' - \ell}{\ell}$$

où ℓ' est la longueur du barreau déformé. Chaque partie du barreau n'est pas nécessairement déformée de la même manière. Il faut donc définir un allongement relatif local, c'est-à-dire qui dépend de la position en chaque point d'abscisse x .



Déformation locale d'un barreau.

Pour cela, considérons la portion du barreau située initialement entre les points d'abscisses respectives x et $x + \Delta x$. Lorsque la traction est exercée, ces points se déplacent et leurs abscisses

respectives deviennent $x + u_x(x)$ et $x + \Delta x + u_x(x + \Delta x)$. L'épaisseur de l'élément situé entre les deux sections devient :

$$\Delta x' = [x + \Delta x + u_x(x + \Delta x)] - [x + u_x(x)]$$

Si l'épaisseur Δx est suffisamment petite, un développement en série de Taylor au premier ordre permet d'écrire :

$$u_x(x + \Delta x) = u_x(x) + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x$$

L'allongement relatif de l'élément est :

$$\frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{u_x(x + \Delta x) - u_x(x)}{\Delta x}$$

Par définition, la déformation ε au voisinage du point d'abscisse initiale x est la limite de ce rapport lorsque Δx tend vers zéro, c'est-à-dire la dérivée de u_x par rapport à x :

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_x(x + \Delta x) - u_x(x)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Il convient de noter que la déformation ε qui est le rapport de deux longueurs est sans dimension. Lorsque ε est négative on dit que le milieu subit une contraction locale et si ε est positive le milieu subit une extension locale.

8.1.2 Contrainte moyenne

Le fil s'est allongé sous l'effet de la force extérieure F exercée normalement sur sa section droite de surface S . Dans le cas général, cette force n'est pas constante le long du fil, elle dépend de l'abscisse x . On définit la contrainte moyenne par le rapport :

$$\tau = \frac{F}{S}$$

Cette grandeur homogène à une force par unité de surface s'exprime en N m^{-2} (ou en Pa).

8.1.3 Loi de Hooke

Dans le domaine de l'élasticité linéaire, c'est-à-dire pour des tensions mécaniques et des déformations pas trop importantes, la déformation est proportionnelle à la contrainte. Cette propriété est exprimée par la loi de Hooke :

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \frac{F}{S} = \frac{1}{E} \tau$$

ou de manière équivalente

$$\tau = \frac{F}{S} = E \varepsilon$$

Dans cette expression la constante E , caractéristique du matériau constituant le fil, s'appelle le module d'Young ; elle a les dimensions d'une force par unité de surface (en N m^{-2} ou en Pa).

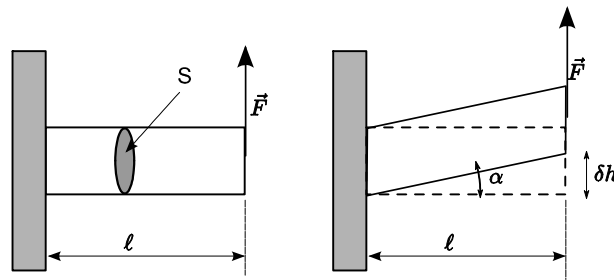
8.1.4 Coefficient de Poisson

En plus de l'allongement selon Ox , il se produit un rétrécissement dans les directions perpendiculaires à l'axe du fil. Si d est la dimension latérale du fil, on a :

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{d' - d}{d} = -\nu \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

Le coefficient ν est appelé coefficient de Poisson ; c'est un nombre *positif toujours inférieur* à 0.5. Pour les métaux usuels, sa valeur est $\nu = 0.3$.

8.1.5 Loi de Hooke pour les forces tangentielles



Barreau soumis à une force de cisaillement.

Si nous appliquons à la surface S d'un barreau une force F , non plus normale mais tangentielle, la longueur du barreau ne change pas, seules les arêtes normales au plan d'application de F tournent d'un angle α .

Dans l'approximation de l'élasticité linéaire (cas des petites valeurs de α), l'angle α est proportionnel à la force appliquée. La loi de Hooke s'exprime dans ce cas par :

$$\frac{F}{S} = G \alpha \simeq G \tan(\alpha) = G \frac{\delta h}{\ell}$$

où G est le module de cisaillement ; il s'exprime également en $N \cdot m^{-2}$.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs caractéristiques des modules de quelques matériaux courants.

Matière	ρ ($kg \cdot m^{-3}$)	E ($N \cdot m^{-2}$)	G ($N \cdot m^{-2}$)
Acier	7.8×10^3	2.2×10^{11}	0.9×10^{11}
Fer	7.85×10^3	2×10^{11}	0.8×10^{11}
Aluminium	2.7×10^3	0.7×10^{11}	0.26×10^{11}
Cuivre	8.93×10^3	1.22×10^{11}	0.42×10^{11}

Caractéristiques mécaniques de quelques métaux usuels.

8.2 Onde plane longitudinale

8.2.1 Equation de propagation

Nous allons considérer ici uniquement le cas des ondes planes longitudinales se propageant dans un barreau. Considérons un élément du barreau de section S compris entre deux sections d'abscisses respectives x et $x + \Delta x$. La section d'abscisse x est soumise à une traction $F(x)$ de la part de la partie gauche du barreau, tandis que la section d'abscisse $x + \Delta x$ est soumise à une traction $F(x + \Delta x)$ de la part de la partie droite du barreau. Sous l'action de ces deux forces les deux sections se déplacent respectivement de $u_x(x)$ et $u_x(x + \Delta x)$ le long de l'axe (Ox). Le déplacement de particules u_x est une fonction à la fois de la coordonnée x et du temps t . Si ρ est la masse volumique du barreau, la masse de l'élément d'épaisseur Δx s'écrit :

$$\Delta m = \rho S \Delta x$$

Écrivons la relation fondamentale de la dynamique pour cet élément :

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = F(x + dx) - F(x)$$

Dans le cas où Δx est faible, la force $F(x + \Delta x)$ agissant en $x + \Delta x$ s'écrit :

$$F(x + \Delta x) = F(x) + \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x$$

et la relation fondamentale de la dynamique devient

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x$$

Sachant que la force normale F est reliée à la déformation $\varepsilon = \frac{\partial u_x}{\partial x}$ par la loi de Hooke :

$$F = SE\varepsilon = SE \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

on obtient

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0$$

On retrouve l'équation des ondes (équation de d'Alembert) qui décrit la propagation d'un ébranlement à la vitesse

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Les ondes décrites par cette équations correspondent à une grandeur physique vectorielle, le déplacement de particules $\vec{u}$, orientée le long de la direction de propagation. Ce type de mouvement ondulatoire est dit longitudinal.

8.2.2 Ondes progressives harmoniques

Définition

Dans le cas d'une onde progressive sinusoïdale, le déplacement de particules s'écrit en notation complexe :

$$u_x(x, t) = U_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

où $k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le module du vecteur d'onde, λ étant la longueur d'onde.

La composante F_x de la force exercée en x par la partie gauche sur la partie droite est

$$F_x(x, t) = -SE \frac{\partial u_x}{\partial x} = ikE u_x(x, t) = ikEU_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

Impédance

On appelle impédance en un point le rapport de l'amplitude complexe de la force F_x à l'amplitude complexe de la vitesse de particule $\dot{u}_x$:

$$Z(x) = \frac{F_x}{\dot{u}_x}$$

Dans le cas d'une onde progressive harmonique, on a :

$$\dot{u}_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} = i\omega u_x(x, t)$$

d'où l'expression de l'impédance en un point

$$Z(x) = S\rho V = S\sqrt{\rho E}$$

On appelle impédance caractéristique du milieu constituant le barreau, la quantité

$$Z_c = \sqrt{\rho E} = \rho V$$

D'où l'expression de l'impédance mécanique du barreau :

$$Z(x) = SZ_c$$

Nous remarquons que l'impédance caractéristique ne dépend pas de la position ; cette propriété est caractéristique des ondes planes progressives. Dans les autres cas, en présence de réflexion par exemple, l'impédance en un point dépend de la coordonnée x . Notons que l'impédance caractéristique du milieu Z_c s'exprime en N m^{-2} tandis que l'impédance Z du barreau s'exprime en kg s^{-1} .

8.2.3 Réflexion et transmission

Réflexion et transmission entre deux barreaux semi-infinis

Soit deux barreaux de même section S et de longueur semi-infinie, reliés en $x = 0$. Leurs masses volumiques sont respectivement ρ_1 et ρ_2 . Lorsqu'une onde longitudinale venant de $-\infty$ se propage vers $x = 0$ dans le premier barreau, elle donne naissance au point de jonction, $x = 0$, à une onde réfléchie et une onde transmise. L'écriture de la continuité du déplacement et de la contrainte mécanique en $x = 0$ permet d'obtenir le coefficient de réflexion R_u et le coefficient de transmission T_u définis respectivement par :

$$R_u = \frac{U_R}{U_i}$$

$$T_u = \frac{U_T}{U_i}$$

où U_i , U_R et U_T sont les amplitudes des déplacements associés respectivement à l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde transmise. On en déduit :

$$R_u = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$T_u = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

où Z_1 et Z_2 sont les impédances respectives du premier et du deuxième barreau.

Réflexion à l'extrémité d'un barreau terminé par une masse M .

Considérons un barreau (ρ, S, E) de longueur supposée semi-infinie ($x \leq 0$) terminé en son extrémité $x = L$ par une masse M . Le barreau est le siège de la propagation d'une onde incidente et d'une onde réfléchie ; l'onde résultante s'écrit :

$$u(x, t) = U_i e^{i(\omega t - kx)} + U_R e^{i(\omega t + kx)}$$

Écrivons la relation fondamentale de la dynamique pour la masse M :

$$M \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{x=L} = ES \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L}$$

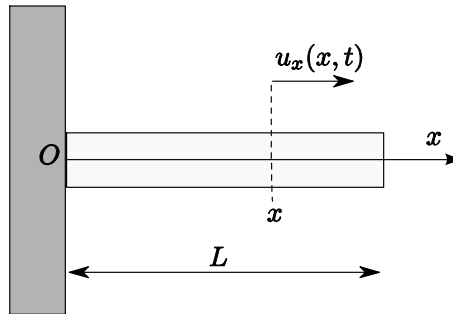
On en déduit l'expression du coefficient de réflexion au niveau de la masse M :

$$R_u = \frac{U_R}{U_i} \Big|_{x=0} = \frac{\sqrt{\rho E} - i \frac{M\omega}{S}}{\sqrt{\rho E} + i \frac{M\omega}{S}}$$

On constate que le module du coefficient de réflexion $|R_u|$ est égal à 1 ; il s'agit donc d'un phénomène de réflexion totale. On retrouve un résultat assez général qui est que le coefficient de réflexion est égal à la différence des impédances sur la somme des impédances et que dans le cas où l'impédance terminale est imaginaire, il se produit un phénomène de réflexion totale.

8.2.4 Oscillations libres d'un barreau

Considérons un barreau de longueur L dont l'une des extrémités ($x = L$) est libre et l'autre ($x = 0$) est fixée à un bâti rigide. Lorsque le barreau est soumis à une déformation longitudinale initiale, il est le siège d'ondes longitudinales se propageant dans le sens des x croissant et des x décroissants. Chacune de ces ondes subit une réflexion totale aux extrémités du barreau, donnant ainsi une multitude d'onde se propageant dans les deux sens. Ces différentes ondes interfèrent entre elles.



Oscillations libres d'un barreau

Pour ces raisons, nous recherchons une solution de l'équation d'onde sous la forme :

$$u_x(x, t) = A e^{i(\omega t - kx)} + B e^{i(\omega t + kx)}$$

Dans cette dernière expression le vecteur d'onde k est donné par la relation de dispersion $k = \frac{\omega}{V}$ tandis que A et B sont deux nombres complexes qui représentent l'amplitude complexe résultante de toutes les ondes se propageant respectivement dans le sens des x croissant et dans le sens des x décroissant. Ces deux nombres complexes dépendent des conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$, qui sont traduites par les équations suivantes :

$$\begin{cases} u_x(x=0) = 0 \\ F(x=L) = SE \frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \end{cases}$$

La première condition impose

$$A + B = 0$$

d'où $B = -A$, et

$$u_x(x, t) = A (e^{-ikx} - e^{+ikx}) e^{i\omega t} = -2iA \sin(kx) e^{i\omega t}$$

La seconde condition impose

$$-2ikSEA \cos(kL) e^{i\omega t} = 0$$

soit

$$\cos(kL) = 0$$

dont les racines sont :

$$k_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2L}$$

n étant un nombre entier. Les pulsations correspondantes permettant de satisfaire les conditions aux frontières sont

$$\omega_n = k_n V = (2n + 1) \frac{\pi V}{2L}$$

Ces pulsations "permises" sont appelées les pulsations propres. Il y a donc une infinité de pulsations propres et la solution générale s'écrit :

$$u_x(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} -2iA_n \sin(k_n x) e^{i\omega_n t}$$

En revenant à la notation réelle, c'est-à-dire en prenant la partie réelle de l'expression précédente, on obtient :

$$u_x(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x)$$

où les coefficients a_n et b_n sont reliés aux nombres complexes A_n par : $-2iA_n = a_n - ib_n$ avec

$$k_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2L} \quad \text{et} \quad \omega_n = k_n V = (2n + 1) \frac{\pi V}{2L}$$

Les ω_n sont les pulsations propres. Les coefficients a_n et b_n sont déterminés par les conditions initiales du mouvement. Supposons qu'à $t = 0$ nous imposons aux différents points du barreau un déplacement initial

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

et une vitesse initiale

$$\dot{u}(0, t) = v_0(t)$$

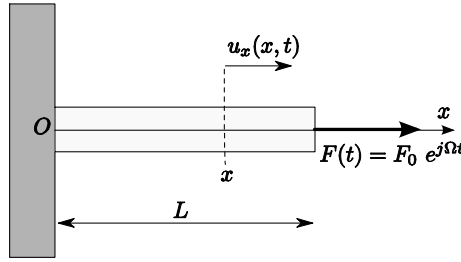
Dans ce cas nous aurons les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(k_n x) \\ v_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n b_n \sin(k_n x) \end{aligned}$$

On doit inverser ces équations pour obtenir les coefficients a_n et b_n . La méthode de Fourier décrite dans le chapitre précédent, permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left[(2n + 1) \frac{\pi x}{2L}\right] dx \\ b_n &= \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L v_0(x) \sin\left[(2n + 1) \frac{\pi x}{2L}\right] dx \end{aligned}$$

8.2.5 Oscillations forcées d'un barreau de longueur finie



Oscillations forcées d'un barreau de longueur finie.

Considérons un barreau dont l'extrémité en $x = 0$ est fixée rigidement tandis que l'extrémité située en $x = L$ est soumise à une force sinusoïdale $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$.

En notation complexe les conditions aux frontières s'écrivent :

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0 \\ F_x(x = L, t) = F_0 e^{i\Omega t} \end{cases}$$

Le milieu de propagation étant de longueur finie, le déplacement de particules $u_x(x, t)$ s'écrit en régime permanent :

$$u_x(x, t) = A e^{i(\Omega t - Kx)} + B e^{i(\Omega t + Kx)}$$

avec $K = \frac{\Omega}{V}$ et

$$F_x = ES \frac{\partial u_x}{\partial x} = -2iKES \left[A e^{i(\Omega t - Kx)} - B e^{i(\Omega t + Kx)} \right]$$

En tenant compte des conditions aux limites on obtient les expressions de A et B :

$$A = \frac{F_0 e^{iKL}}{2iKES \cos(KL)}$$

$$B = \frac{F_0 e^{-iKL}}{2iKES \cos(KL)}$$

D'où l'expression du déplacement de particules :

$$u(x, t) = U(x) e^{i\Omega t}$$

où l'amplitude $U(x)$ s'exprime par :

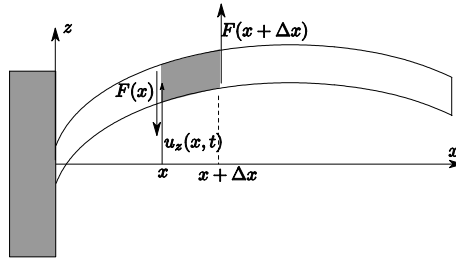
$$U(x) = \frac{F_0 \sin[Kx]}{KES \cos(KL)}$$

On obtient un phénomène d'ondes stationnaires dont les amplitudes et les positions des nœuds et des ventres pour le déplacement de particules sont donnés par le tableau suivant :

	Noeuds	Ventres
Position	$x_n = L - (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$	$x_n = L - n \frac{\lambda}{2}$
Amplitude	$U_{\min} = 0$	$U_{\max} = \frac{F_0}{KES \cos(KL)}$

La résonance apparaît pour des fréquences d'excitations Ω égales à l'une des pulsations propres du barreau $\Omega = \omega_n = (2n + 1) \frac{\pi V}{2L}$. Pour ces fréquences, l'amplitude $U_{\max}$ au niveau des ventres d'élongation devient infinie.

8.3 Ondes élastiques transversales



Ondes transversales dans un barreau

Nous allons analyser le problème des ondes élastiques transversales dans un barreau solide. Lorsque l'extrémité du barreau est soumise à une force de cisaillement, parallèle à la section S , nous pouvons supposer que chaque section du barreau se déplace de bas en haut et de haut en bas sans mouvement horizontal. Appelons u_z le déplacement transversal d'une tranche d'épaisseur Δx à un instant donné. Le déplacement u_z est fonction de la position x sinon il correspondrait à un déplacement de l'ensemble du barreau parallèlement à lui même. Il en résulte une déformation de cisaillement. Chaque tranche d'épaisseur Δx est soumise aux forces antagonistes $F(x)$ et $F(x + \Delta x)$ qui sont tangentes aux sections et qui sont produites par les portions du barreau qui sont situées de chaque côté du barreau. Il existe entre la force tangentielle de cisaillement et la déformation de cisaillement, une relation analogue à la loi de Hooke :

$$\frac{F}{S} = G \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

où G est un coefficient caractéristique du matériau, que l'on nomme module de cisaillement. La force résultante sur la tranche Δx est :

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x$$

La relation fondamentale de la dynamique pour la tranche Δx s'écrit :

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x = \rho S \Delta x \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho S \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

La dérivation de la loi de Hooke, par rapport à x donne :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = SG \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$$

Par substitution, on obtient

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0$$

A nouveau nous obtenons l'équation de propagation d'une onde, de cisaillement cette fois, qui se propage à la vitesse

$$V = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

La composante F_z de la force exercée par la partie gauche du barreau sur l'élément d'épaisseur Δx est définie par :

$$F_z = -SG \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

On peut montrer que l'impédance mécanique du barreau Z s'écrit :

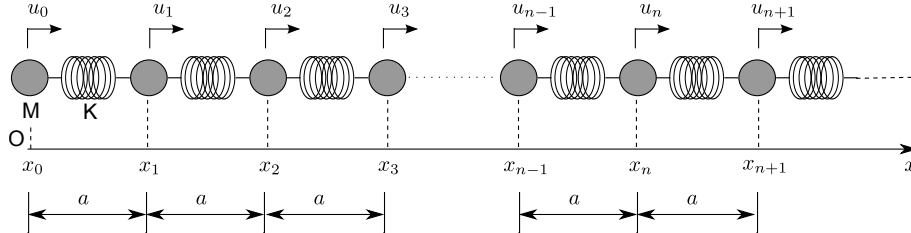
$$Z = \frac{F_z}{\dot{u}_z} = SZ_c$$

où $Z_c = \rho V = \sqrt{\rho E}$ est l'impédance caractéristique du matériau constituant le barreau.

8.4 Modèle de la chaîne linéaire

Dans ce paragraphe on développera sommairement le modèle de la chaîne linéaire d'atomes qui permet de décrire le phénomène de propagation des ondes élastiques dans les solides. Considérons un barreau de section S et de longueur L "très grande", taillé dans un solide cristallin monoatomique. Si on applique sur la face située en $x = 0$ une force de compression $F(t)$, une onde longitudinale va se propager le long de l'axe Ox . Étudions le phénomène qui se produit dans le barreau avant que le front d'onde n'ait atteint son extrémité. Nous supposons que le barreau est un solide monocristallin monoatomique et que les atomes le constituant sont disposés aux noeuds d'un réseau tridimensionnel régulier. En se propageant une onde plane longitudinale fait osciller simultanément tous les atomes se trouvant dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation Ox . Puisqu'ils se déplacent tous en bloc, ces atomes sont équivalents à une masse unique M concentrée sur l'axe Ox . Chacun des plans transversaux d'atomes est maintenu en place par les forces de liaison qui agissent comme des ressorts placés en parallèle ; ils sont donc équivalents à un ressort unique de raideur K . Il suffit donc de raisonner sur une seule chaîne d'atomes identiques et équidistants, séparés à l'équilibre par une distance a .

8.4.1 Modélisation microscopique du problème et mise en équations.



Modèle de la chaîne linéaire

Le solide est constitué d'une chaîne comportant une infinité d'atomes, assimilés à des points matériels de même masse M , reliés par des ressorts identiques de longueur à vide a et de raideur K , et susceptibles de se déplacer sans frottement le long de l'axe Ox .

Ces ressorts fictifs modélisent, dans l'approximation linéaire, les actions subies par les atomes lorsqu'ils se déplacent au voisinage de leurs position d'équilibre. C'est ce couplage entre les différents oscillateurs qui permet la propagation d'une onde élastique. On repère les positions à l'équilibre de l'atome d'ordre n par : $x_n|_{\text{éq}} = n a$. Hors équilibre, les abscisses de ces atomes sont : $x_n = x_n|_{\text{éq}} + u_n(t) = n a + u_n(t)$; les déplacements particuliers $u_n(t)$ supposés faibles devant a , dépendent à la fois du temps et de la position à l'équilibre na .

L'énergie potentielle de ce système s'écrit :

$$U = \frac{1}{2}K(u_1 - u_0)^2 + \frac{1}{2}K(u_2 - u_1)^2 + \cdots + \frac{1}{2}K(u_n - u_{n-1})^2 + \frac{1}{2}K(u_{n+1} - u_n)^2 + \cdots$$

tandis que l'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}M\dot{u}_0^2 + \frac{1}{2}M\dot{u}_1^2 + \cdots + \frac{1}{2}M\dot{u}_n^2 + \cdots$$

D'où la fonction de Lagrange :

$$\mathcal{L} = T - U = \sum_n \frac{1}{2} M \dot{u}_n^2 - \sum_n \frac{1}{2} K (u_n - u_{n-1})^2$$

L'écriture de l'équation de Lagrange permet d'obtenir l'équation différentielle du mouvement pour l'atome d'ordre n :

$$\begin{aligned} M \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} &= -K (u_n - u_{n-1}) - K (u_n - u_{n+1}) \\ M \ddot{u}_n &= -K (2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}) \end{aligned}$$

8.4.2 Solution en régime permanent sinusoïdal

Imposons à la particule d'ordre $n = 0$ une oscillation sinusoïdale :

$$u_0 = a_0 e^{i\omega t}$$

En régime permanent et en l'absence d'atténuation, le mouvement de chaque atome est identique à celui de la particule d'ordre $n = 0$ à un déphasage près qui correspond au temps de propagation de l'onde :

$$u_n = a_0 e^{i(\omega t - kx_n)}$$

où k est le vecteur d'onde et $x_n = na$. L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors :

$$(2K - M\omega^2) - K(e^{ika} + e^{-ika}) = 0$$

soit

$$(2K - M\omega^2) - 2K \cos(ka) = 0$$

d'où

$$M\omega^2 = 4K \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

ou encore

$$\omega = 2\sqrt{\frac{K}{M}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

Cette dernière relation est appelée relation de dispersion. Sa représentation graphique est appelée diagramme de dispersion du milieu de propagation (figure ci-dessous).

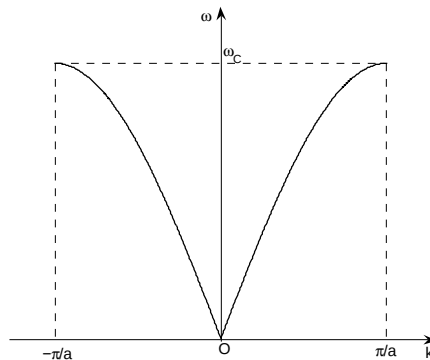


Diagramme de dispersion

Comme $\left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right| < 1$, la fréquence des ondes élastiques pouvant se propager dans un cristal est limitée par la fréquence de coupure :

$$f < f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{K}{M}}$$

L'intervalle $-\frac{\pi}{a} < k < \frac{\pi}{a}$ est appelé première zone de Brillouin. La longueur d'onde la plus courte que puisse transmettre le réseau est :

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = 2a$$

où $k_c = \frac{\pi}{a}$.

Nous remarquons que u_n peut s'écrire également :

$$u_n = a_0 e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v_\phi}\right)}$$

où $v_\phi = \frac{\omega}{k}$ représente la vitesse de phase.

Pour les faibles valeurs du nombre d'onde ($ka \ll 1$), la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega \simeq \sqrt{\frac{K}{M}} ak$$

C'est l'équation d'une droite dont la pente $V_0 = a\sqrt{\frac{K}{M}}$ représente la vitesse de propagation des ondes élastiques de basses fréquences. La fréquence de coupure peut s'écrire en fonction de V_0 :

$$f_c = \frac{V_0}{\pi a}$$

8.4.3 L'approximation d'un milieu continu.

Dans un réseau cristallin, la distance a entre deux atomes est typiquement de l'ordre de $10^{-10}m$, distance très inférieure aux dimensions caractéristiques des phénomènes de propagation à étudier (qui sont plutôt de l'ordre de grandeur du mm à quelques mètres). Ceci suggère de considérer la chaîne d'atomes comme un milieu continu, dont les déplacements sont décrits par une fonction continue $u(x, t)$ prenant les valeurs $u_n(t)$ aux points d'abscisses $x_n = na$.

L'équation du mouvement de la particule d'ordre n peut se réécrire sous la forme :

$$M\ddot{u}_n - K(u_{n+1} - u_n) + K(u_n - u_{n-1}) = 0$$

Si $\lambda \gg a$, la différence $u_{n+1} - u_n$ est un infiniment petit qui, au premier ordre près, peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1} - u_n}{x_{n+1} - x_n} &= \frac{u_{n+1} - u_n}{a} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_{n+1}} \\ \frac{u_n - u_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} &= \frac{u_n - u_{n-1}}{a} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_n} \end{aligned}$$

Dans ces conditions, l'équation différentielle du mouvement devient :

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Ka \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_{n+1}} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_n \right]$$

Au premier ordre près, on peut considérer que :

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_{n+1}} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_n}}{x_{n+1} - x_n} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et l'équation du mouvement s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{Ka^2}{M} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Cette équation est équivalente à l'équation de propagation :

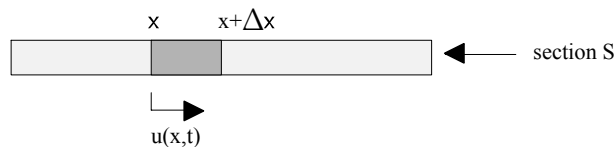
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

où $V_0 = a\sqrt{\frac{K}{M}}$ est la vitesse de propagation des ondes élastiques de basse fréquence.

Ordres de grandeur : La vitesse V_0 des ondes élastiques de basse fréquence dans les solides est en général comprise entre 1000 m s^{-1} et 10000 m s^{-1} . Les distances entre atomes sont de quelques angstroms. Avec $V_0 = 5000 \text{ m s}^{-1}$ et $a = 5\text{\AA}$, la fréquence de coupure est $f_c = 3.2 \times 10^{12} \text{ Hz}$. Cette valeur est si élevée que pour le domaine des fréquences inférieures à quelques gigahertz, on se situe au tout début de la courbe de dispersion, là où la pulsation est proportionnelle au nombre d'onde. La longueur d'onde $\lambda = \frac{V_0}{f}$, comprise dans ces cas entre quelques mm et quelques μm , est très grande devant les distances interatomiques, si bien que pour l'onde le milieu apparaît comme continu.

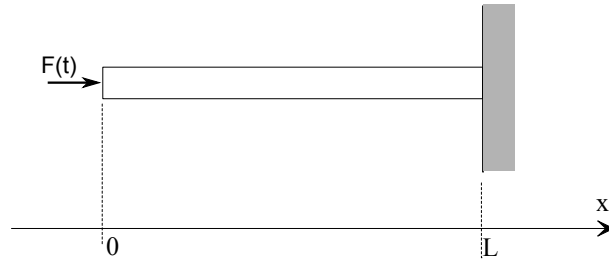
Exercices

Exercice 1 :



Soit un barreau de grande longueur et de faible section S , soumis à des vibrations longitudinales. La masse volumique du barreau et son module d'Young sont respectivement ρ et E . Considérons un petit élément d'épaisseur faible égale à Δx , situé à la position x . Lorsque cet élément est atteint par la vibration, il se met en mouvement sous l'action de la résultante des forces exercées par les parties du barreau qui se trouvent à gauche et à droite. En raison de l'élasticité du milieu, les deux sections situées respectivement en x et $x + \Delta x$ subissent des déplacements différents notés respectivement $u(x, t)$ et $u(x + \Delta x, t)$; l'élément subit donc une déformation en plus du mouvement de translation autour de sa position d'équilibre. On négligera dans la suite la déformation latérale.

1. Montrer que $u(x, t)$ correspond à une onde longitudinale qui se propage à une vitesse V que l'on précisera. Dans le cas d'une onde progressive sinusoïdale, calculer l'impédance en un point quelconque du barreau.
2. Ce barreau, dont la longueur est égale à L , est encastré dans une paroi rigide. Son autre extrémité est libre.



- (a) Oscillations libres : Ecrire l'expression générale de $u(x, t)$ sous la forme d'ondes sinusoïdales de pulsation ω . Ecrire les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$. En déduire les pulsations propres du barreau.
- (b) Oscillations forcées : L'extrémité du barreau en $x = 0$ est soumise à une force horizontale $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$. Montrer que le déplacement en chaque point s'écrit sous la forme $u(x, t) = U(x) \cos(\Omega t + \phi)$; quelle est l'expression de l'amplitude $U(x)$ et de la phase ϕ . Quelle est la position des minima et des maxima de vibration? Quelles sont les amplitudes U_{min} et U_{max} en ces points. Pour quelles pulsations obtient-on le phénomène de résonance?

Exercice 2 : Un barreau de longueur L est fixé rigidement en $x = 0$; son extrémité en $x = L$ est libre.

1. Montrer que seuls les harmoniques impairs sont permis.
2. Déterminer la fréquence fondamentale du barreau s'il est constitué d'acier et que sa longueur est $L = 0.5$ m.
3. Si une force statique est appliquée à l'extrémité libre du barreau de telle sorte à déplacer cette extrémité d'une longueur égale à h , montrer que, lorsque le barreau vibre suite à une suppression brusque de cette force, les amplitudes des différents harmoniques de vibration sont donnés par $A_n = [8h/n\pi^2] \sin(n\pi/2)$.
4. Déterminer ces amplitudes si la force statique vaut $F_S = 5000$ N et si la section droite du barreau a une surface égale à $s = 0.00005$ m².

N.B : Rechercher préalablement les caractéristiques mécaniques de l'acier dans la bibliographie.

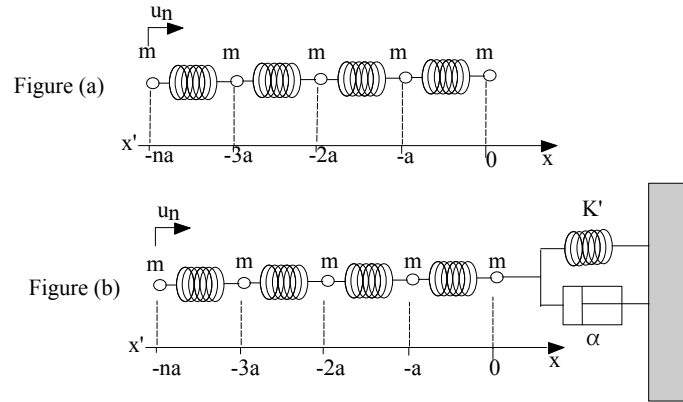
Exercice 3 : Un barreau d'acier de 0.0001 m² de section droite et de 0.25 m de longueur est libre de se mouvoir en $x = 0$ et il est chargé à l'autre extrémité, en $x = 0.25$ m, par une masse de 0.15 kg.

1. Calculer la fréquence fondamentale des vibrations longitudinales de ce barreau.
2. Déterminer la position à laquelle ce barreau doit être fixé pour causer la plus faible perturbation de son mode fondamental de vibration.
3. Quand ce barreau vibre dans son mode fondamental, quel est le rapport de l'amplitude du déplacement de l'extrémité libre à celle qui est chargée par la masse?
4. Quelle est la fréquence du premier harmonique de ce barreau?

Exercice 4 : Une masse $m = 2$ kg est suspendue à un fil d'acier de longueur $\ell = 1.0$ m et de section droite $s = 0.00001$ m².

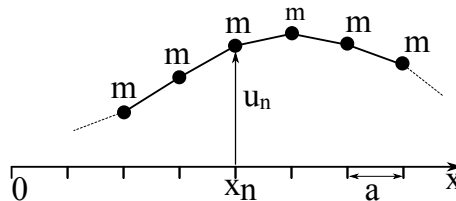
1. Calculer la fréquence fondamentale des oscillations verticales de la masse en la considérant comme un simple oscillateur.
2. Calculer la fréquence fondamentale des oscillations verticales du système constitué par un barreau vibrant fixé à une extrémité et chargé par une masse à l'autre extrémité.
3. Montrer que pour $kL < 0.2$, l'équation obtenue à la question précédente peut se mettre sous la forme : $\omega_0 = \sqrt{s/m}$.

Exercice 5 : Soit une chaîne linéaire de particule identiques de masse m . A l'équilibre, la masse d'ordre n est située, sur l'axe Ox , au point d'abscisse $x_n = n \cdot a$, x_n étant négatif ou nul (Figure a). Les masses sont reliées entre elles par des ressorts identiques de raideur K , dont la longueur au repos est a . Soit u_n l'écart de la particule d'ordre n par rapport à la position d'équilibre.



1. Ecrire l'équation du mouvement de la particule d'ordre n .
2. En cherchant les solutions sous la forme d'ondes progressives sinusoïdales planes telles que $u_n = U_0 e^{i(\omega t - kna)}$, où U_0 est une constante réelle, déterminer la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$.
3. La particule en $x_0 = 0$ est fixe. On envoie une onde incidente de la gauche vers la droite décrite par $u_n = U_0 e^{i(\omega t - kna)}$. Déterminer l'amplitude U' et la phase ϕ de l'onde réfléchie.
4. La particule en $x = 0$ est maintenant liée à un bâti fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur K' et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α (Figure b). On choisit K' et α pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie.
 - (a) Ecrire l'équation du mouvement de la masse située en $x = 0$.
 - (b) On envoie une onde incidente comme précédemment. Déterminer les coefficients K' et α pour que cette masse vibre sous l'effet de la seule onde incidente (pas d'onde réfléchie).

Exercice 6 : Soit une corde plombée telle que représentée sur la figure ci-dessous, où x_n représente la position de la masse m et u_n son déplacement. Les plombs sont espacés l'un de l'autre de a et reliés entre eux par des segments de fil de tension T_0 que l'on supposera constante lors des déplacements des masses. Cette corde plombée de longueur L telle que $L \gg a$, subit une vibration transversale.



Dans le cas des vibrations de faible amplitude, on demande de :

1. Ecrire l'équation du mouvement du plomb d'ordre n .
2. Chercher les solutions de cette équation sous la forme d'une onde progressive.
3. En déduire la relation entre la pulsation ω et le vecteur d'onde k .
4. Montrer que l'on peut limiter l'étude à l'intervalle $0 < |k| < \pi/a$. Tracer la courbe $\omega = \omega(k)$.

5. Calculer la pulsation de coupure ω_M .
6. Définir la vitesse de phase V_ϕ et la vitesse de groupe V_G . Décrire le mouvement lorsque $k = \pi/a$.
7. Dans le cas des très grandes longueurs d'onde, que deviennent V_ϕ et V_G ?

Chapitre 9

Ondes acoustiques dans les fluides

9.1 Introduction

Les ondes acoustiques sont des ondes élastiques qui se propagent dans les fluides (gaz ou liquides). Il est donc possible d'obtenir l'équation d'onde qui régit la propagation des ondes planes dans un fluide par la même démarche que celle que nous avons utilisée pour établir l'équation de propagation des ondes transversales dans une corde.

Dans la suite, nous utiliserons les symboles suivants pour étudier l'onde acoustique qui se propage suivant l'axe des x :

x : coordonnée à l'équilibre d'une particule du milieu.

u_x : composante suivant l'axe des x du déplacement de particule par rapport à la position d'équilibre.

ρ_0 : masse volumique du fluide à l'équilibre

P : pression instantanée en un point quelconque

P_0 : pression à l'équilibre

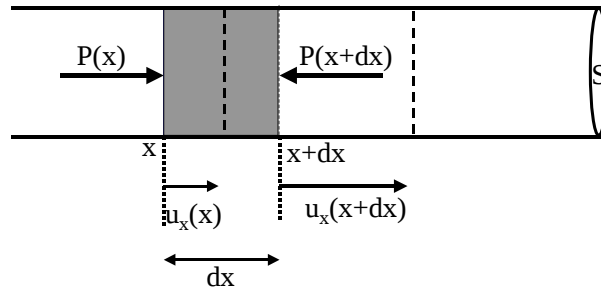
$p = P - P_0$: surpression ou pression acoustique

c : vitesse de propagation de l'onde

On entend par particule, un élément de volume contenant des millions de molécules de telle sorte qu'il puisse être considéré comme continu, mais toutefois suffisamment petit pour que les grandeurs acoustiques comme la pression, la masse volumique et la vitesse de particule puissent être considérées comme constantes dans cet élément de volume. Dans ce qui suit, nous négligerons les effets de la gravitation de telle sorte que P_0 et ρ_0 sont uniformes dans tout le milieu. On suppose d'autre part que le milieu est homogène, isotrope et parfaitement élastique, c'est-à-dire non dissipatif.

9.2 Equation d'onde

Considérons le cas d'une onde plane émise dans un fluide par une membrane vibrante plane. Lorsque celle-ci est au repos, la pression dans le fluide est uniforme et égale à P_0 . En se déplaçant, par exemple dans le sens des x positifs, la membrane comprime la couche de fluide adjacente. Cette situation est instable : le fluide se détend en comprimant à son tour la tranche voisine. L'onde progresse ainsi de proche en proche par une succession de compressions et de détentes.



Propagation d'une onde acoustique

Soit une tranche de fluide de petite épaisseur Δx située à l'abscisse x . Lorsque la perturbation atteint ce point, les forces agissant sur cette tranche ne s'équilibrent plus et elle se met en mouvement. Soit $u_x(x, t)$ le déplacement à l'instant t du plan d'abscisse x . Soit $F_x(x, t)$ et $F_x(x + \Delta x, t)$ les forces agissant sur la tranche de fluide respectivement en x et $x + \Delta x$. Ces forces s'expriment par :

$$F_x(x, t) = S P(x, t)$$

$$F_x(x + \Delta x, t) = -S P(x + \Delta x, t)$$

La résultante de ces deux forces est :

$$\Delta F_x = F_x(x, t) + F_x(x + \Delta x, t)$$

$$\Delta F_x = -S [P(x + \Delta x, t) - P(x, t)]$$

En faisant un développement en série de Taylor au premier ordre de $P(x, t)$, on obtient :

$$P(x + \Delta x, t) = P(x, t) + \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x$$

D'où :

$$\Delta F_x = -S \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x$$

Comme $P = P_0 + p$, la force résultante s'exprime par :

$$\Delta F_x = -S \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x$$

Sous l'action de cette force, la tranche de fluide subit une accélération et en écrivant la relation fondamentale de la dynamique, on obtient :

$$\Delta m \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -S \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x$$

Le fluide étant compressible, le déplacement du plan d'abscisse $x + \Delta x$ est différent du déplacement du plan d'abscisse x et il vaut $u_x(x + \Delta x, t)$. De nouveau un développement en série de Taylor au premier ordre permet d'écrire :

$$u_x(x + \Delta x, t) = u_x(x, t) + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x$$

Pour prendre en compte la compressibilité du fluide, calculons la dilatation volumique subie par la tranche de fluide. Soit $\Delta v_0 = S \Delta x$, le volume à l'équilibre et soit Δv , le volume en cours de mouvement, avec :

$$\begin{aligned}
\Delta v &= S [x + \Delta x + u_x(x + \Delta x) - x - u_x(x)] \\
\Delta v &= S [\Delta x + u_x(x + \Delta x) - u_x(x)] \\
\Delta v &= S \left[\Delta x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x \right] \\
\Delta v &= \Delta v_0 + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta v_0
\end{aligned}$$

On en déduit la dilatation volumique

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{\Delta v - \Delta v_0}{\Delta v_0} \\
\theta &= \frac{\partial u_x}{\partial x}
\end{aligned}$$

Rappelons que pour un fluide compressible, la surpression p est reliée à la dilatation volumique θ par la relation

$$p = -\kappa \theta$$

où κ est le module de compressibilité. On obtient ainsi :

$$p = -\kappa \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

Remarque : On utilise souvent le *coefficient de compressibilité* $\chi = \frac{1}{\kappa}$.
Les deux équations

$$\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\
p &= -\kappa \frac{\partial u_x}{\partial x}
\end{aligned}$$

constituent les deux équations fondamentales de l'acoustique.

En remplaçant dans la première équation p par son expression tirée de la seconde équation on obtient l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

où V représente la vitesse de propagation définie par

$$V = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}}$$

9.3 Vitesse du son

Le phénomène de propagation étant un processus adiabatique, la relation liant la pression et le volume est

$$Pv^\gamma = \text{constante}$$

En calculant la différentielle, on obtient :

$$v^\gamma dP + \gamma P v^{\gamma-1} dv = 0$$

Si l'on considère que dP représente la variation de pression au voisinage de la pression à l'équilibre P_0 , on obtient :

$$v_0^\gamma p + \gamma P_0 v_0^{\gamma-1} \Delta v = 0$$

d'où :

$$p = -\gamma P_0 \frac{\Delta v}{v_0}$$

En tenant compte de la définition du module de compressibilité, on obtient :

$$\kappa = \frac{1}{\chi} = \gamma P_0$$

D'où la vitesse du son dans un fluide :

$$V = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

Exemple : Dans l'air, dans les conditions normales $T = 20^\circ C$ et $P_0 = 10^5 N \cdot m^{-2}$, $\gamma = 1.4$ et $\rho_0 = 1.29 kg \cdot m^{-3}$, on en déduit $V \simeq 330 m \cdot s^{-1}$

La valeur de la pression à l'équilibre dépend fortement de la température. Pour une mole de gaz parfait, on a :

$$P_0 v_0 = RT$$

d'où

$$P_0 = \frac{RT}{v_0}$$

et

$$V = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\rho_0 v_0}}$$

Le produit $\rho_0 v_0$ représente la masse molaire M du gaz ; d'où :

$$V = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Dans un gaz parfait, la vitesse de propagation du son est proportionnelle à la racine carrée de la température mesurée en kelvin (K).

9.4 Onde progressive sinusoïdale

9.4.1 Définition

Une onde acoustique sinusoïdale, s'écrit :

$$p(x, t) = p_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{V} \right) \right]$$

On définit le module du vecteur d'onde k par

$$k = \frac{\omega}{V}$$

d'où

$$p(x, t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$$

En notation complexe, l'onde progressive sinusoïdale s'écrit

$$p(x, t) = p_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

La relation liant la pression acoustique et la compressibilité, à savoir

$$p = -\kappa \frac{\partial u}{\partial x}$$

permet d'écrire

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{1}{\kappa} \int p(x, t) dx \\ u(x, t) &= -\frac{1}{\kappa} \int p_0 e^{i(\omega t - kx)} dx \\ u(x, t) &= \frac{p_0}{ik\kappa} e^{i(\omega t - kx)} \\ u(x, t) &= \frac{p_0}{i\omega\rho_0 V} e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned}$$

La dérivation de cette dernière expression par rapport au temps permet d'obtenir la vitesse de particules :

$$\dot{u}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 V} p_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

On constate que pour une onde progressive la vitesse de particules est en phase avec la pression acoustique.

9.4.2 Impédance acoustique

On appelle impédance acoustique en un point le rapport de l'amplitude complexe de la pression à l'amplitude complexe de la vitesse de particule

$$Z(x) = \frac{p}{\dot{u}}$$

Dans le cas d'une onde progressive, on obtient :

$$Z(x) = \rho_0 V$$

Le produit $\rho_0 V$ définit l'impédance acoustique caractéristique du fluide

$$Z_c = \rho_0 V$$

On obtient une propriété de l'onde plane progressive :

$$Z(x) = Z_c \quad \forall x$$

9.4.3 Energie acoustique

Densité d'énergie cinétique

Soit un petit élément de volume v_0 dont le déplacement est $u(x, t)$ et dont la vitesse est $\dot{u}(x, t)$; il possède une énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} \rho_0 v_0 \dot{u}^2$$

On définit l'énergie cinétique par unité de volume ou densité d'énergie cinétique

$$\mathcal{E}_c = \frac{E_c}{v_0} = \frac{1}{2} \rho_0 \dot{u}^2$$

Densité d'énergie potentielle

Soit un petit élément de volume v_0 . Sous l'action de la surpression p , cet élément se comprime ou se dilate en raison de la compressibilité du fluide. L'énergie potentielle emmagasinée est égale au travail fourni par la pression pour comprimer ou dilater le volume v_0 :

$$E_p = \int -p dv$$

Sachant que

$$p = -\kappa \frac{v - v_0}{v_0}$$

on en déduit que :

$$dv = -\frac{1}{\kappa} v_0 dp$$

d'où :

$$E_p = \frac{v_0}{\kappa} \int_0^p p dp$$

$$E_p = \frac{v_0}{2\kappa} p^2$$

On en déduit la densité d'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = \frac{E_p}{v_0} = \frac{1}{2\kappa} p^2$$

Densité d'énergie

La densité d'énergie est égale à la somme de la densité d'énergie cinétique et de la densité d'énergie potentielle

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho_0 \dot{u}^2 + \frac{1}{2\kappa} p^2$$

Dans le cas particulier d'une onde plane progressive sinusoïdale,

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_p = \frac{1}{2\rho_0 V^2} p_0 \cos^2(\omega t - kx)$$

et

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\rho_0 V^2} p_0 \cos^2(\omega t - kx)$$

On définit la valeur moyenne temporelle de la densité d'énergie comme

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathcal{E} dt$$

$$\text{où } T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

On définit également la moyenne spatiale de la densité d'énergie :

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_x^{x+\lambda} \mathcal{E} dx$$

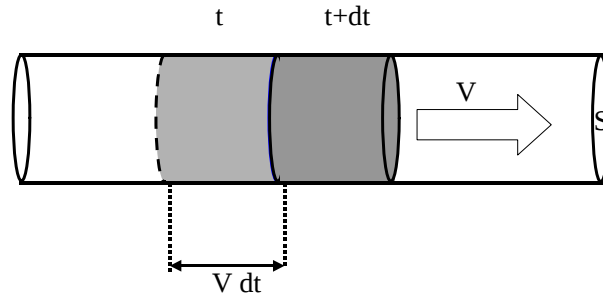
Dans le cas d'une onde progressive, ces deux valeurs sont égales et valent :

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{p_0^2}{2\rho_0 V^2}$$

Intensité

On appelle intensité de l'onde acoustique la puissance qui traverse, par unité de temps, une surface unité perpendiculaire à la direction de propagation.

Pour calculer l'intensité de l'onde calculons l'énergie qui traverse pendant un intervalle de temps une surface S perpendiculaire à la direction de propagation.



Flux de puissance

Cette énergie dE est égale à l'énergie contenue dans un volume $S V dt$ et elle est égale à

$$dE = \mathcal{E} S V dt$$

D'où la puissance $\mathcal{P}$ traversant cette surface

$$\mathcal{P} = \frac{dE}{dt} = \mathcal{E} S V$$

On en déduit l'expression de l'intensité de l'onde acoustique

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{S} \mathcal{P} \\ I(t) &= \mathcal{E} V \\ I(t) &= \frac{p_0^2}{\rho_0 V} \cos^2(\omega t - kx) \end{aligned}$$

On appelle intensité de l'onde acoustique la valeur moyenne

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} I(t) dt \\ I &= \frac{p_0^2}{2\rho_0 V} \\ I &= \frac{p_0^2}{2Z_c} \end{aligned}$$

Niveau sonore

On définit le niveau sonore en décibels par

$$N_{dB} = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

I_0 est une intensité de référence correspondant à $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

Exemple : Pour une fréquence $f = 1 \text{ kHz}$, le seuil d'audition est égal à 0 dB et le seuil de douleur est égal à 130 dB . Pour calculer l'intensité, l'amplitude de pression p_0 la vitesse de particules et le déplacement de particules, dans le cas où $V = 330 \text{ m/s}$ et $Z_c = 411 \text{ rayleighs}$, on peut utiliser les relations suivantes :

$$I = I_0 10^{0.1 N_{dB}}$$

$$p_0 = \sqrt{2 Z_c I}$$

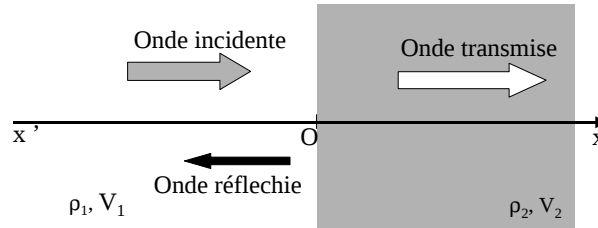
$$\dot{u} = \frac{p_0}{Z_c}$$

$$u = \frac{\dot{u}}{2\pi f}$$

Pour chacun de ces deux cas, on obtient :

N_{dB}	$I \left(\text{W/m}^2 \right)$	$p_0 \left(\text{Pa} \right)$	$\dot{u} \left(\text{m/s} \right)$	$u \left(\text{m} \right)$
0 dB	10^{-12}	2.9×10^{-5}	7×10^{-8}	1.1×10^{-11}
130 dB	10.0	91	0.22	3.5×10^{-5}

9.5 Réflexion-Transmission



Réflexion à un interface fluide-fluide

Soit deux milieux fluides semi-infinis séparés par une surface plane. Choisissons un repère orthonormé de telle sorte que le plan yOz coïncide avec la surface de séparation. Lorsque une onde acoustique provenant de $-\infty$, se propageant dans le premier dans la direction de l'axe des x arrive à la surface de séparation, elle donne naissance à deux ondes

- une onde réfléchie qui se propage dans le premier milieu dans le sens des x décroissants.
- une onde transmise qui se propage dans le second milieu dans le sens des x croissants.

L'onde résultante dans le premier milieu ($x \leq 0$) est caractérisée par :

$$p_1(x, t) = p_i(x, t) + p_R(x, t)$$

$$p_1(x, t) = P_i e^{i(\omega t - k_1 x)} + P_R e^{i(\omega t + k_1 x)}$$

$$\dot{u}_1(x, t) = \frac{1}{Z_1} \left[P_i e^{i(\omega t - k_1 x)} - P_R e^{i(\omega t + k_1 x)} \right]$$

Dans le deuxième milieu, on a

$$\begin{aligned}
p_2(x, t) &= p_T(x, t) \\
p_2(x, t) &= P_T e^{i(\omega t - k_2 x)} \\
\dot{u}_2(x, t) &= \frac{1}{Z_2} P_T e^{i(\omega t - k_2 x)}
\end{aligned}$$

Les relations de continuité à l'interface s'écrivent

$$\begin{cases} p_1(0, t) = p_2(0, t) \\ \dot{u}_1(0, t) = \dot{u}_2(0, t) \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} P_i + P_R = P_T \\ \frac{1}{Z_1} (P_i - P_R) = \frac{1}{Z_2} P_T \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} 1 + \frac{P_R}{P_i} = \frac{P_T}{P_i} \\ 1 - \frac{P_R}{P_i} = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{P_T}{P_i} \end{cases}$$

On définit

– le coefficient de réflexion pour la pression

$$R_P = \frac{P_R}{P_i}$$

– le coefficient de transmission pour la pression

$$T_P = \frac{P_T}{P_i}$$

Les deux relations de continuité s'écrivent alors

$$\begin{cases} 1 + R_P = T_P \\ 1 - R_P = \frac{Z_1}{Z_2} T_P \end{cases}$$

On en déduit les coefficients de réflexion et de transmission

$$\begin{aligned}
R_P &= \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \\
T_P &= \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}
\end{aligned}$$

En tenant compte des relations $p_i = Z_1 \dot{u}_i$, $p_R = -Z_1 \dot{u}_R$ et $p_T = Z_2 \dot{u}_T$, on peut calculer les coefficients de réflexion et de transmission pour la vitesse de particules et pour le déplacement de particules :

$$\begin{aligned}
R_{\dot{U}} &= R_U = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \\
T_{\dot{U}} &= T_U = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}
\end{aligned}$$

En tenant compte des relations $I_i = P_i^2/2Z_1$, $I_R = P_R^2/2Z_1$ et $I_T = P_T^2/2Z_2$, on peut calculer les coefficients de réflexion et de transmission pour l'intensité acoustique :

$$\alpha_R = \frac{I_R}{I_i} = \left[\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right]^2$$

$$\alpha_T = \frac{I_T}{I_i} = \frac{4Z_1 Z_2}{[Z_1 + Z_2]^2}$$

9.6 Effet Doppler

9.6.1 Définition

On appelle effet Doppler le changement apparent de la fréquence d'un signal électromagnétique (radio ou lumineux) ou acoustique reçu par un observateur mobile par rapport à une source émettrice fixe ou bien par un observateur fixe par rapport à une source émettrice mobile. La variation apparente de fréquence est proportionnelle à la vitesse relative entre l'observateur et la source le long du chemin qui les sépare. Si la source d'ondes oscillant avec la fréquence ν_0 se déplace par rapport au milieu avec la vitesse $\vec{v}_1$ et l'observateur avec la vitesse $\vec{v}_2$, la fréquence ν , perçue par l'observateur sera alors :

$$\nu = \nu_0 \frac{1 + \frac{v_2}{V} \cos \theta_2}{1 + \frac{v_1}{V} \cos \theta_1}$$

où V est la vitesse des ondes dans le milieu immobile, θ_1 et θ_2 sont les angles formés par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ avec le vecteur $\vec{R}$ reliant le récepteur à la source d'ondes.

9.6.2 Cas particulier des faibles vitesses

Dans le cas où $v_1/V \ll 1$ et $v_2/V \ll 1$, on peut appliquer la formule approchée

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{V} \cos \theta \right)$$

où v est la vitesse relative de la source et du récepteur ($\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$), θ étant l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{R}$.

Si la source et l'observateur se rapprochent, l'angle θ est obtus, $\cos \theta < 0$ et $\nu > \nu_0$; si la source et l'observateur s'éloignent l'un de l'autre, l'angle θ est aigu, $\cos \theta > 0$ et $\nu < \nu_0$

Exercices

Exercice 1 : Dans les conditions normales de température et de pression, l'air est caractérisé par une masse volumique à l'équilibre $\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3$ et une valeur de $\gamma = c_p/c_v = 1.402$. Calculer la vitesse de propagation du son dans l'air et son impédance acoustique spécifique dans ces conditions de température et de pression ($T = 20^\circ \text{C}$ et $P_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$).

Exercice 2 : Soit une onde acoustique plane de fréquence $f = 24 \text{ kHz}$, qui se propage dans l'eau avec une vitesse $c = 1480 \text{ m/s}$. Elle véhicule une puissance moyenne de $\mathcal{P} = 1 \text{ W}$ uniformément répartie sur une section circulaire de diamètre $D = 40 \text{ cm}$, normale à la direction de propagation. La fréquence de l'onde est $f = 24 \text{ kHz}$.

1. Calculer l'intensité acoustique ; quel est en dB le niveau de l'intensité acoustique relativement à un niveau de référence $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$?

2. Calculer l'amplitude de la pression acoustique, l'amplitude de la vitesse de particules et l'amplitude du déplacement de particules.
3. Comparer aux résultats que l'on aurait obtenus si cette onde se propageait dans l'air.

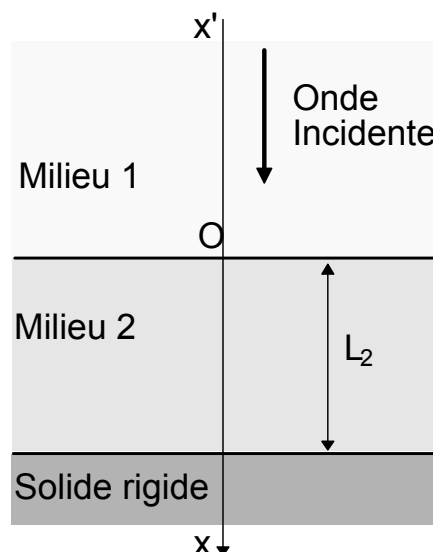
Exercice 3 : Une onde acoustique plane se propageant dans l'eau arrive en incidence normale à la surface de séparation avec l'air. Calculer les valeurs numériques des rapports suivants : P_R/P_i , P_T/P_i , U_R/U_i , U_T/U_i , $\dot{U}_R/\dot{U}_i$, $\dot{U}_T/\dot{U}_i$, I_R/I_i , I_T/I_i où U , $\dot{U}$, P et I représentent respectivement le déplacement des particules, la vitesse des particules, la pression acoustique et l'intensité acoustique. Les indices i , R et T se rapportent respectivement à l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde transmise.

Exercice 4 : Répondre aux mêmes questions que pour l'exercice précédent en supposant que l'onde acoustique se propage initialement dans l'air et se transmet dans l'eau. Comparer aux résultats de l'exercice précédent.

Exercice 5 : Un tuyau cylindrique de section S constante est rempli d'un gaz, de masse volumique ρ , où les ondes acoustiques peuvent se propager à la vitesse V . A l'une des extrémités du tuyau, en $x = 0$, on place un piston plan qui est animé, suivant l'axe Ox du tuyau, d'un déplacement sinusoïdal d'amplitude U_0 et de pulsation ω . A la position $x = L$, le tuyau est fermé par une paroi rigide.

1. Montrer que le déplacement peut se mettre sous la forme : $u(x, t) = U(x) e^{i(\omega t + \phi)}$ où $U(x)$ est réel. Donner l'expression de l'amplitude $U(x)$ et de la phase ϕ de l'onde résultante.
2. En déduire les positions et les valeurs des maxima et des minima de l'amplitude $U(x)$ en valeur absolue.
3. Pour quelles fréquences obtient-on un phénomène de résonance ? Quelle est alors l'amplitude du déplacement au niveau des ventres de déplacement.
4. Dans le cas où $L = 13\lambda/12$, λ étant la longueur d'onde, tracer sur un graphe les variations de $|U(x)|$ en fonction de x . Echelle : $1 \text{ cm} = \lambda/12$. Quel est le nombre de maxima (ventres) et de minima (noeuds) ?

Exercice 6 : Une onde acoustique plane, sinusoïdale de pulsation ω , d'amplitude A_1 , se propage suivant la direction Ox dans un milieu fluide de masse volumique ρ_1 . Elle arrive sous incidence normale sur un second milieu fluide de masse volumique ρ_2 et d'épaisseur L_2 , déposé sur un solide parfaitement rigide (voir figure). On notera V_1 et V_2 les vitesses de propagation respectives dans chacun des deux milieux fluides. Les vecteurs d'onde correspondants seront notés respectivement k_1 et k_2 .



Dans chacun des deux milieux, la pression acoustique s'écrit respectivement

$$p_1(x, t) = A_1 e^{i(\omega t - k_1 x)} + A'_1 e^{i(\omega t + k_1 x)}$$

$$p_2(x, t) = A_2 e^{i(\omega t - k_2 x)} + A'_2 e^{i(\omega t + k_2 x)}$$

1. Ecrire les expressions respectives, $\dot{u}_1(x, t)$ et $\dot{u}_2(x, t)$, des vitesses de particule dans le milieu 1 et dans le milieu 2.
2. Ecrire les relations de continuité pour la pression acoustique et pour la vitesse de particule en $x = 0$. En déduire deux relations entre les coefficients A_1 , A'_1 , A_2 et A'_2 .
3. Ecrire la relation de continuité pour la vitesse de particule en $x = L_2$. En déduire une relation entre les coefficients A_2 et A'_2 .
4. En déduire le coefficient de réflexion $R = \frac{A'_1}{A_1}$. En donner le module et la phase.
5. Mesure de la vitesse V_2
 - (a) Quelle est la condition pour que, dans le milieu 2, la pression possède un nœud en $x = 0$ et un seul ventre ?
 - (b) Sachant que le premier nœud de pression dans le milieu 1 se situe en $x = -L_1$, calculer la vitesse de propagation V_2 en fonction de V_1 , L_1 et L_2 .
 - (c) L'expérience est réalisée, dans les conditions ci-dessus, avec de l'eau comme milieu 1 ($V_1 = 1500$ m/s) et de la glycérine comme milieu 2. On mesure $L_1 = 7.5$ mm et $L_2 = 4.95$ mm. Quelle est la vitesse de propagation V_2 des ondes acoustiques dans la glycérine ?

Exercice 7 :

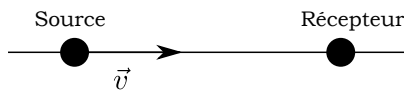


Figure 1

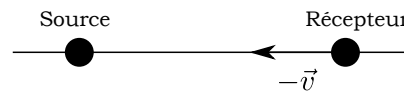


Figure 2

Un récepteur capte les ondes sonores émises par une source dans un milieu où le son se propage à la vitesse V . N ondes sont émises pendant le temps t .

1. Le récepteur étant au repos et la source se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ (figure 1), quelle est la distance qui sépare deux ondes successives ? En déduire la fréquence ν_R ans le système de référence (R) lié au récepteur et la comparer à la fréquence ν_S de l'onde dans le système de référence (S) lié à la source.
2. La source sonore est maintenant immobile et le récepteur se déplace à une vitesse $-\vec{v}$ (figure 2). Quelle est la fréquence ν_0 de la fréquence ν_R de la vibration sonore reçue par le récepteur ?
3. Comparer les résultats de 1) et 2) dans le cas où $V \gg v$. Conclusion.

Annexe A

Equations différentielles

A.1 Introduction

Les oscillations linéaires des systèmes à un degré de liberté sont régies par des équations différentielles du second ordre à coefficients constants. Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est une relation entre une variable dépendante y et ses dérivées première et seconde par rapport à une variable indépendante t , qui peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\delta \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = A(t)$$

Les coefficients δ et ω_0 sont des constantes réelles positives. Dans les problèmes de vibration le paramètre t représente le temps et on note par convention :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \dot{y} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \ddot{y}\end{aligned}$$

D'où l'écriture de l'équation différentielle :

$$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega_0^2 y = A(t)$$

A.2 Equation homogène

L'équation différentielle est dite homogène si $A(t) = 0$:

$$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

On recherche des solutions qui sont de la forme $y(t) = e^{st}$. Dans ce cas l'équation différentielle s'écrit :

$$\left[s^2 + 2\delta s + \omega_0^2 \right] e^{st} = 0$$

Cette équation doit être vraie quel que soit t , ce qui implique :

$$s^2 + 2\delta s + \omega_0^2 = 0$$

On obtient ainsi une équation du second degré en s dite équation caractéristique. Les racines de cette équation caractéristique sont :

$$s_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$y(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

A_1 et A_2 sont deux constantes d'intégration que l'on peut déterminer à partir des conditions initiales :

$$y(t=0) = y_0$$

$$\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0$$

Sachant que δ et ω_0 sont des nombres réels positifs, s_1 et s_2 sont négatives ou complexes avec une partie réelle négative. La nature des solutions s_1 et s_2 de l'équation caractéristique dépend de la valeur relative de δ par rapport à ω_0 . Ainsi trois cas sont à envisager :

A.2.1 Régime fortement amorti ($\delta > \omega_0$)

Dans ce cas, les deux racines s_1 et s_2 sont réelles et négatives. L'écriture des conditions initiales donne un système de deux équations :

$$A_1 + A_2 = y_0$$

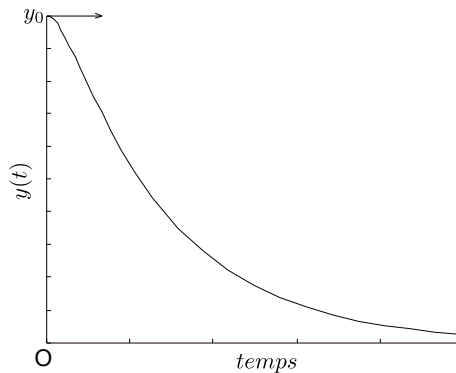
$$s_1 A_1 + s_2 A_2 = \dot{y}_0$$

dont les solutions sont les constantes d'intégration A_1 et A_2 :

$$A_1 = \frac{s_2 y_0 - \dot{y}_0}{s_2 - s_1}$$

$$A_2 = \frac{\dot{y}_0 - s_1 y_0}{s_2 - s_1}$$

$y(t)$ est une fonction décroissant sans oscillations vers zéro lorsque t augmente. La forme exacte de $y(t)$ dépend des valeurs de A_1 et A_2 qui sont déterminées par les conditions initiales. Pour les conditions initiales particulières suivantes : $y_0 \neq 0$; $\dot{y}_0 = 0$, la figure suivante représente les variations de y au cours du temps



Régime apériodique

A.2.2 Régime critique ($\delta = \omega_0$)

L'équation caractéristique possède une racine double :

$$s_1 = s_2 = -\delta$$

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$y(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t}$$

Les constantes d'intégration A_1 et A_2 sont déterminées à partir des conditions initiales et valent :

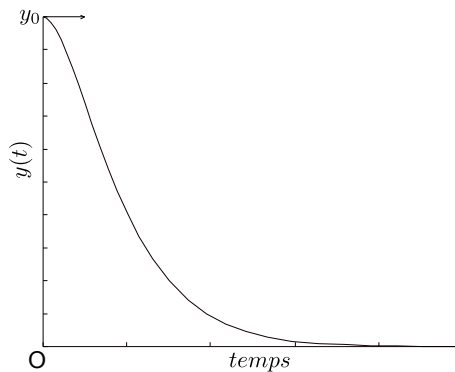
$$A_1 = y_0$$

$$A_2 = \dot{y}_0 + \delta y_0$$

$y(t)$ est une fonction décroissant vers zéro quand t augmente. Il est aisé de vérifier que cette situation correspond à la décroissance la plus rapide de $y(t)$. Ce cas correspond au régime critique. Pour le cas particulier de conditions initiales : $y_0 \neq 0$; $\dot{y}_0 = 0$, la solution est :

$$y(t) = y_0 e^{-\delta t} (1 + \delta t)$$

La figure ci-dessous représente les variations de $y(t)$.



Régime critique

A.2.3 Régime pseudo-périodique ($\delta < \omega_0$)

Dans ce cas s_1 et s_2 sont complexes conjugués :

$$s_1 = -\delta + i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$s_2 = -\delta - i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

où i représente le nombre imaginaire pur vérifiant la relation $i^2 = -1$. Posons :

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

La solution générale s'écrit alors :

$$y(t) = e^{-\delta t} [A_1 e^{i\omega_D t} + A_2 e^{-i\omega_D t}]$$

Sachant que :

$$e^{i\omega_D t} = \cos(\omega_D t) + i \sin(\omega_D t)$$

$$e^{-i\omega_D t} = \cos(\omega_D t) - i \sin(\omega_D t)$$

$y(t)$ s'écrit :

$$y(t) = e^{-\delta t} [(A_1 + A_2) \cos(\omega_D t) + i (A_1 - A_2) \sin(\omega_D t)]$$

$y(t)$ étant réelle, les nombres complexes A_1 et A_2 doivent vérifier les relations :

$$A_1 + A_2 : \text{réel}$$

$$A_1 - A_2 : \text{imaginaire}$$

A_1 et A_2 sont donc complexes conjugués et peuvent se mettre sous la forme :

$$A_1 = A' e^{i\varphi}$$

$$A_2 = A' e^{-i\varphi}$$

$y(t)$ s'écrit alors :

$$y(t) = A' e^{-\delta t} [e^{i(\omega_D t + \varphi)} + e^{-i(\omega_D t + \varphi)}]$$

soit finalement, en posant $A = 2A'$:

$$y(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_D t + \varphi)$$

$y(t)$ peut être interprétée comme une fonction périodique de pulsation ω_D , de phase initiale φ et d'amplitude $Ae^{-\delta t}$ décroissant exponentiellement au cours du temps. On peut définir une pseudo-période

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$$

A et φ sont deux constantes d'intégration définies à partir des conditions initiales :

$$y_0 = A \cos(\varphi)$$

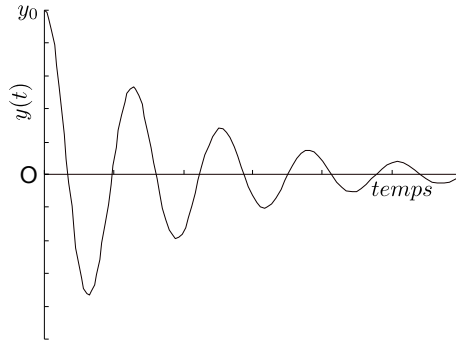
$$\dot{y}_0 = -A \cos(\varphi) [\delta + \omega_D \tan(\varphi)]$$

D'où l'on tire :

$$\varphi = - \arctan \left[\frac{\dot{y}_0 + \delta y_0}{\omega_D y_0} \right]$$

$$A = \frac{\sqrt{(\omega_D y_0)^2 + (\dot{y}_0 + \delta y_0)^2}}{\omega_D}$$

La figure ci-dessous représente les variations de $y(t)$ dans le cas particulier de conditions initiales : $y_0 \neq 0$; $\dot{y}_0 = 0$.



Régime pseudo-périodique

Remarque : Cas particulier où $\delta = 0$:

L'équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

La solution s'exprime dans ce cas :

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Cette solution est appelée solution harmonique car $y(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps, de pulsation ω_0 , de période $T_0 = 2\pi/\omega_0$ et dont l'amplitude A et la phase initiale ϕ sont déterminées par les conditions initiales :

$$y_0 = A \cos(\phi)$$

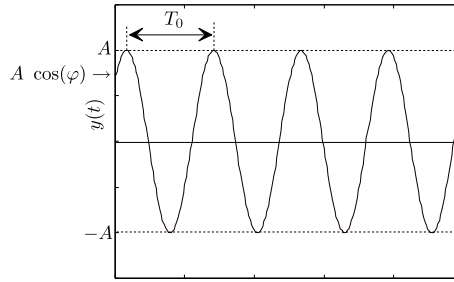
$$\dot{y}_0 = -\omega_0 A \sin(\phi)$$

d'où l'on tire :

$$\phi = - \arctan \left[\frac{\omega_0 y_0}{\dot{y}_0} \right]$$

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_0} \right)^2}$$

La figure suivante représente les variations au cours du temps de $y(t)$ dans le cas particulier où : $y_0 = 1$ et $\dot{y}_0 = 0$.



Oscillations non amorties

A.3 Equation avec second membre

A.3.1 Solution générale

Soit $y(t)$ la solution générale de l'équation différentielle avec second membre :

$$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega_0^2 y = A(t)$$

Soit $y_H(t)$ la solution de l'équation homogène et soit $y_P(t)$ une solution particulière de l'équation avec second membre ; $y_H(t)$ et $y_P(t)$ sont les solutions respectives des deux équations différentielles suivantes :

$$\ddot{y}_H + 2\delta \dot{y}_H + \omega_0^2 y_H = 0$$

$$\ddot{y}_P + 2\delta \dot{y}_P + \omega_0^2 y_P = A(t)$$

Les opérations de dérivation qui interviennent étant des opérations linéaires, l'addition membre par membre des deux équations différentielles précédentes donne :

$$(\ddot{y}_H + \ddot{y}_P) + 2\delta (\dot{y}_H + \dot{y}_P) + \omega_0^2 (y_H + y_P) = A(t)$$

Ainsi la solution générale peut être obtenue en faisant la somme de la solution homogène et d'une solution particulière :

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

A.3.2 Cas particulier où $A(t)$ est constante

Considérons le cas particulier important où $A(t) = A_0$, A_0 étant une constante réelle. L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega_0^2 y = A_0$$

On peut vérifier que

$$y = \frac{A_0}{\omega_0^2}$$

constitue une solution particulière de l'équation avec second membre. Selon le cas la solution générale de l'équation avec second membre sera :

- Régime fortement amorti ($\delta > \omega_0$)

$$y(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \frac{A_0}{\omega_0^2}$$

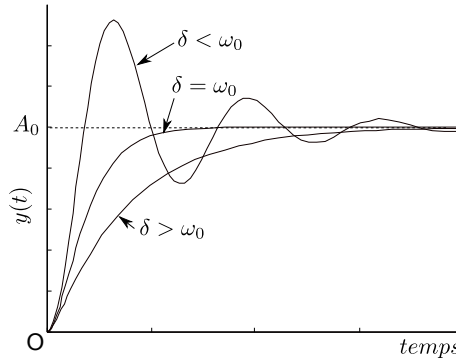
– Régime critique ($\delta = \omega_0$)

$$y(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t} + \frac{A_0}{\omega_0^2}$$

– Régime pseudo-périodique ($\delta < \omega_0$)

$$y(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_D t + \varphi) + \frac{A_0}{\omega_0^2}$$

Dans les trois cas considérés les constantes d'intégration A_1 , A_2 , A et ϕ sont déterminées à partir des conditions initiales. Considérons à titre d'exemple le cas particulier $y_0 = 0$ et $\dot{y}_0 = 0$. La résolution des systèmes d'équations obtenus permet de calculer les constantes d'intégration et de tracer les variations de $y(t)$ pour les trois régimes. Les variations correspondantes de $y(t)$ sont représentées par la figure ci-dessous.



Cas où $A(t)$ est une constante.

A.3.3 Cas particulier où $A(t) = A_0 \cos(\Omega t)$:

Nous pouvons vérifier que $y_P(t) = Y_0 \cos(\Omega t + \theta)$ constitue une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre à condition que l'amplitude Y_0 et la phase θ vérifient la relation :

$$[\omega_0^2 - \Omega^2] Y_0 \cos(\Omega t + \theta) - 2\delta\Omega Y_0 \sin(\Omega t + \theta) = A_0 \cos(\Omega t)$$

Le développement des termes en cosinus et en sinus permet d'obtenir :

$$Y_0 = \frac{A_0}{\sqrt{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

$$\theta = -\arctan \left[\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right]$$

La solution complète s'écrit alors suivant le cas :

– Régime fortement amorti ($\delta > \omega_0$)

$$y(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + Y_0 \cos(\Omega t + \theta)$$

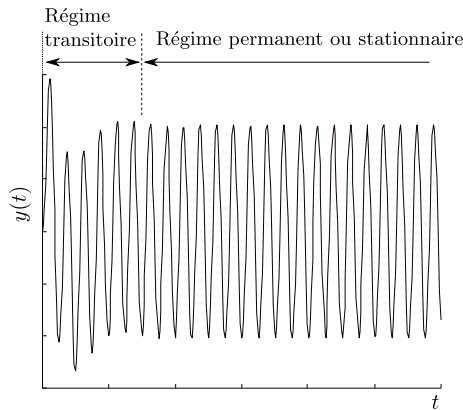
– Régime critique ($\delta = \omega_0$)

$$y(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t} + Y_0 \cos(\Omega t + \theta)$$

– Régime pseudo-périodique ($\delta < \omega_0$)

$$y(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_D t + \varphi) + Y_0 \cos(\Omega t + \theta)$$

Comme dans le cas précédent les constantes d'intégration A_1 , A_2 , A et θ sont déterminées à partir des conditions initiales. La figure suivante représente le résultat obtenu dans le cas particulier où : ($y_0 = 0, \dot{y}_0 = 0$).



Cas où $A(t)$ est une fonction sinusoïdale

On remarque que dans tous les cas la solution homogène tend zéro lorsque t augmente, et la solution générale s'identifie alors avec la solution particulière :

$$y(t) \simeq y_P(t)$$

Pour cette raison la solution de l'équation homogène est appelée solution transitoire tandis que la solution particulière est appelée solution permanente.

A.3.4 Cas où $A(t)$ est une fonction périodique du temps

Introduction

Nous avons étudié dans le paragraphe précédent la solution de l'équation différentielle dans le cas harmonique, c'est-à-dire lorsque le second membre est une fonction sinusoïdale de la variable t . En considérant le cas de fonctions périodiques, nous procéderons à une généralisation du cas harmonique.

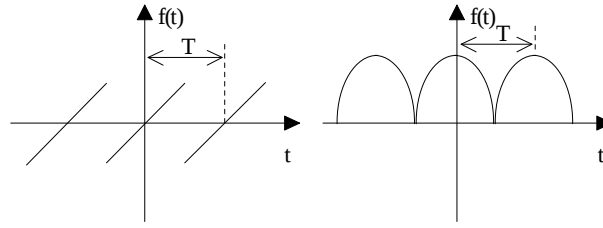
Développement en série de Fourier d'une fonction périodique

Les fonctions périodiques Une fonction $f(t)$ est dite périodique, de période T , si pour tout t , $f(t + T) = f(t)$ où T est une constante positive. La plus petite valeur non nulle de T est appelé la période de $f(t)$.

Exemples :

1. La fonction $\sin(\pi t)$ reprend les mêmes valeurs pour $t = 2, 4, 6$ puisque $\sin[\pi(t + 2)] = \sin[\pi(t + 4)] = \sin[\pi(t + 6)] = \sin(\pi t)$. Cependant 2 est la période de $\sin(\pi t)$.
2. La période de $\sin(\Omega t)$ ou de $\cos(\Omega t)$ est $2\pi/\Omega$. La période de $\sin(n\Omega t)$ et de $\cos(n\Omega t)$ est $2\pi/n\Omega$.
3. Une constante a pour période n'importe quel nombre positif.

4. Les figures ci-dessous représentent deux exemples de fonctions périodiques non sinusoïdales.



Exemples de fonctions périodiques

Définition des séries de Fourier Soit $f(t)$ une fonction périodique de période T , c'est-à-dire telle que $f(t) = f(t + T)$, la série de Fourier ou le développement de Fourier qui correspond $f(t)$ est définie par :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)$$

où $\Omega = 2\pi/T$, n est un entier positif, a_n et b_n sont les coefficients de Fourier. Ces coefficients sont définis par les expressions suivantes :

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\Omega t) dt$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\Omega t) dt$$

La valeur $a_0/2$ représente la valeur moyenne de $f(t)$ sur la période T . Le terme sinusoïdal de pulsation $\Omega_1 = \Omega$, la plus faible est appelé fondamental tandis que les termes de pulsation $\Omega_n = n\Omega$ plus élevée sont appelés les harmoniques.

Cas des fonctions paires et impaires

- Une fonction est dite paire si $f(-t) = f(t)$. Dans le cas de développement en série de Fourier d'une fonction paire, il n'y aura que les termes en cosinus et parfois une constante qui représente la valeur moyenne. Il est aisé de montrer que :

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

- Une fonction est dite impaire si $f(-t) = -f(t)$. Seuls les termes en sinus peuvent être présents dans un développement en série de Fourier d'une fonction impaire. Il est également aisé de montrer que :

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

Solution de l'équation différentielle La fonction $A(t)$ étant périodique, de période T , son développement de Fourier s'écrit :

$$A(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)$$

La réponse permanente (ou stationnaire) qui s'identifie avec la solution particulière, pour t suffisamment élevé, peut alors être calculée pour chacune des composantes de l'excitation : $a_0/2$, $a_n \cos(n\Omega t)$, $b_n \sin(n\Omega t)$. On obtient alors par superposition :

$$y(t) = \frac{a_0}{2\Omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(\Omega_n t + \theta_n) + b_n \sin(\Omega_n t + \theta_n)}{\sqrt{(\Omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \Omega_n^2}}$$

Exercices

Exercice 1 : Calculer et représenter graphiquement la solution de l'équation différentielle homogène :

$$\ddot{x} + 4x = 0$$

, pour les conditions initiales suivantes :

1. $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 0$.
2. $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 2$.

Exercice 2 : Pour les conditions initiales suivantes :

1. $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 0$.
2. $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 2$.
3. $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 2$.

calculer et représenter graphiquement les solutions des équations différentielles homogènes suivantes :

1. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0$
2. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$
3. $\ddot{x} + 0.3\dot{x} + 4x = 0$

Exercice 3 : Pour les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$, calculer et représenter graphiquement la solution générale de chacune des équations différentielles inhomogènes suivantes :

1. $\ddot{x} + 4x = 5$
2. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 5$
3. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 5$
4. $\ddot{x} + 0.3\dot{x} + 4x = 5$
5. $\ddot{x} + 4x = 5 \cos(3t)$
6. $\ddot{x} + 4x = 5 \cos(2.1t)$
7. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 5 \cos(3t)$

8. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 5 \cos(3t)$

9. $\ddot{x} + 0.3\dot{x} + 4x = 5 \cos(3t)$

Exercice 4 : Calculer la solution particulière de chacune des équations différentielles inhomogènes suivantes :

1. $\ddot{x} + 4x = f(t)$

2. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = f(t)$

3. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = f(t)$

où $f(t)$ est une fonction de période T , définie par :

$$\begin{cases} f(t) = -a & \text{pour } -T/2 \leq t \leq 0 \\ f(t) = +a & \text{pour } 0 \leq t \leq T/2 \end{cases}$$

a étant un nombre réel positif.

Annexe B

Analogies électromécaniques

B.1 Introduction

Des systèmes mécaniques peuvent être représentés par des circuits électriques analogues. Deux systèmes mécanique et électrique sont dits analogues si les équations différentielles qui régissent leur évolution sont identiques. Quand cette équivalence est obtenue, les termes correspondant dans les équations différentielles sont dits analogues.

Il y a deux types d'analogies pour les systèmes mécaniques et électriques

- l'analogie force-tension ou analogie masse-inductance ; c'est la plus utilisée.
- l'analogie force-courant ou analogie masse-capacitance.

B.2 Analogie force-tension ou masse-inductance

Les relations entre le courant électrique i et la charge électrique Q sont exactement de même nature que celles qui existent entre la vitesse $\dot{x}$ et la position x d'un système mécanique en translation :

$$i = \frac{dQ}{dt} \text{ ou encore } Q = \int i dt$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \text{ ou encore } x = \int \dot{x} dt$$

Comme ces grandeurs sont liées par les mêmes relations, nous dirons que les grandeurs électriques Q et i sont respectivement analogues aux grandeurs mécaniques $\dot{x}$ et x

$$x \rightleftharpoons Q$$

$$\dot{x} \rightleftharpoons i$$

Lorsque le condensateur a emmagasiné une charge électrique Q , la tension électrique v à ses bornes est donnée par la relation :

$$v = \frac{1}{C}Q$$

Cette relation est de même nature que celle qui relie l'allongement x d'un ressort linéaire soumis à une force F

$$F = kx$$

Nous dirons que la tension électrique v est analogue à une force mécanique et que l'inverse de la capacité est analogue à un coefficient de rappel élastique k :

$$v \rightleftharpoons F \text{ et } 1/C \rightleftharpoons k$$

Dans le cas d'une force de rappel proportionnelle au déplacement x , l'énergie potentielle $U(x)$ est donnée par :

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

Tandis que l'énergie $\mathcal{E}_E(Q)$ emmagasinée par le champ électrique dans un condensateur s'écrit :

$$\mathcal{E}_E(Q) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Ces résultats montrent que l'énergie potentielle élastique $U(x)$ est analogue à l'énergie électrique $\mathcal{E}_E(Q)$ emmagasinée dans le condensateur.

Il suffit donc de considérer l'analogie : $L \rightleftharpoons m$ pour que la relation $v = L \frac{di}{dt}$ soit équivalente à la relation fondamentale de la dynamique

$$F = m \frac{d\dot{x}}{dt}$$

Tenant compte de ces résultats, nous pouvons considérer que la quantité électrique analogue à l'énergie cinétique est représentée par l'énergie magnétique $\mathcal{E}_M$ emmagasinée dans la bobine d'auto-inductance :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2} L \dot{Q}^2 \rightleftharpoons T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

La puissance dissipée sous forme de chaleur dans une résistance électrique est donnée par la loi de Joule :

$$P_J = R i^2$$

La fonction dissipation qui, par définition, est égale à la moitié de la puissance dissipée peut s'écrire dans ce cas :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} R i^2$$

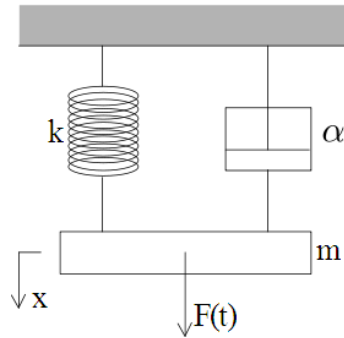
On remarque qu'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α est analogue à une résistance électrique : $\alpha \rightleftharpoons R$.

On peut donc établir le tableau des analogies électromécaniques suivant :

Mécanique	Électricité
vitesse : $\dot{x}$	courant : i
force : F	d.d.p : v
masse : m	inductance : L
amortisseur : α	résistance : R
ressort : k	capacitance : $\frac{1}{C}$
Energie potentielle : U	Energie électrostatique : U_E
Energie cinétique : T	Energie magnétique : U_M

Tableau des analogies force-tension

B.3 Systèmes à un degré de liberté



Le système masse-amortisseur-ressort ci-dessus, est régi par l'équation différentielle suivante

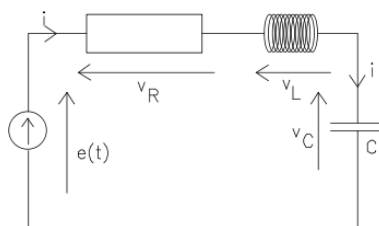
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = F$$

Cette équation différentielle peut s'écrire en fonction de la vitesse $\dot{x}$ sous la forme

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} + \alpha \dot{x} + k \int \dot{x} dt = F$$

L'écriture de la seconde loi de Kirchhoff permet d'obtenir l'équation différentielle qui régit le circuit R.L.C série ci-dessus

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e$$

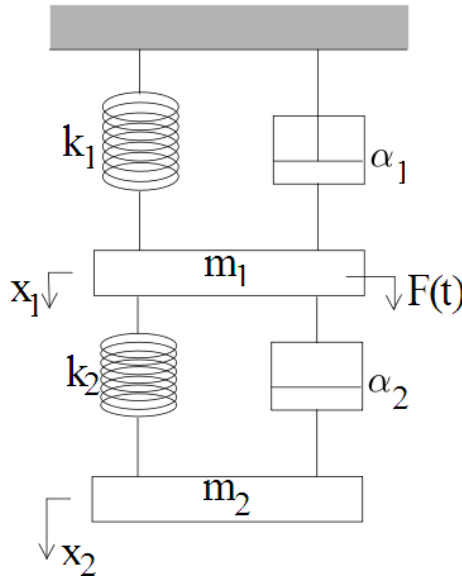


Les équations différentielles qui régissent ces deux systèmes sont de même nature. Les deux systèmes physiques sont dits analogues.

B.4 Système à deux degrés de liberté

Exercice résolu

Etablir, dans le cadre de l'analogie force-tension, le système électrique analogue au système mécanique à deux degrés de liberté ci-dessous.



Solution

Seule une démarche méthodique permet d'obtenir le circuit électrique analogue. Les différentes étapes sont

1. Etablir le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - \alpha_2 \dot{x}_2 - k_2 x_2 &= F \\ m_2 \ddot{x}_2 + \alpha_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 - \alpha_2 \dot{x}_1 - k_2 x_1 &= 0 \end{aligned}$$

2. Regrouper les différents termes en mettant en facteur chaque grandeur correspondant à un élément mécanique.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + \alpha_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + \alpha_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) &= F \\ m_2 \ddot{x}_2 - \alpha_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2 (x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned}$$

3. Ecrire le système d'équations différentielles sous la forme d'un système intégro-différentiel

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d\dot{x}_1}{dt} + \alpha_1 \dot{x}_1 + k_1 \int \dot{x}_1 dt + \alpha_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 \int (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) dt &= F \\ m_2 \frac{d\dot{x}_2}{dt} - \alpha_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2 \int (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) dt &= 0 \end{aligned}$$

4. Etablir la liste des éléments électriques analogues

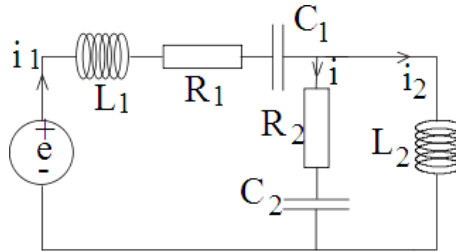
Mécanique	Electricité
$\dot{x}_1$	i_1
$\dot{x}_2$	i_2
m_1	L_1
m_2	L_2
k_1	$\frac{1}{C_1}$
k_2	$\frac{1}{C_2}$
α_1	R_1
α_2	R_2
F	e

5. Remplacer chaque terme du système d'équations mécanique par un terme électrique analogue. Ce qui permet d'établir le système d'équations intégral-différentiel électrique

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + R_2 (i_1 - i_2) + \frac{1}{C_2} \int (i_1 - i_2) dt = e$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} - R_2 (i_1 - i_2) - \frac{1}{C_2} \int (i_1 - i_2) dt = 0$$

6. Construire le circuit électrique analogue en remarquant que les termes de ces deux équations sont respectivement la d.d.p aux bornes de L_1 , R_1 , C_1 , R_2 , C_2 , e et L_2 . Ces deux équations représentent l'écriture de la seconde loi de Kirchoff pour deux mailles parcourues respectivement par les courants i_1 et i_2 et qui ont une branche commune contenant R_2 et C_2 et parcourue par le courant $i = i_1 - i_2$.



Bibliographie

- [1] Crawford, F. S., *Berkeley : Cours de physique : Ondes*, Volume 3, Dunod, 1999.
- [2] Gabillard, R., *Vibrations et phénomènes de propagation*, Dunod, Paris, 1969.
- [3] Kelly, S. G., *Shaum's outline of theory and problems of mechanical vibrations*, McGraw Hill, 1996.
- [4] Kinsler, L. E., *Fundamentals of acoustics*, Wiley, 2000.
- [5] Rocard, Y., *Dynamique générale des vibrations* (4ème éd.), Masson, Paris, 1971.
- [6] Roseau, M., *Vibrations des systèmes mécaniques*, Masson, Paris, 1984.
- [7] Salles, F., Lesueur, C., *Les vibrations mécaniques*, Masson, Paris, 1972.
- [8] Seto, W. W., *Schaum's outline of theory and problems of acoustics*, McGraw-Hill, 1971
- [9] Soutif, M., *Vibrations, propagation, diffusion*, Dunod, Paris, 1970.
- [10] Steidel, R. F., *An Introduction to mechanical vibrations*, (2nd ed), J. Wiley and Sons, 1980.
- [11] Thomson, W.T., *Theory of vibrations with applications* (2nd éd.), Prentice-Hall, 1981.
- [12] Timoshenko, S., *Théorie des vibrations*, Béranger, Paris, 1954.
- [13] Timoshenko, S., Young, D. H., Weaver, W. , *Vibration Problems in Engineering* (4th éd.), J. Wiley and Sons, N. Y., 1974 (édition anglaise de l'ouvrage ci-dessus).
- [14] Tse, F. S., Morse, I. E., Minkle, R.T., *Mechanical vibrations* (2nd éd.), Allyn & Bacon, 1978.