Département de Physique
Module : Math4

Série N°3

Exercice N° 1:

Pour quelles valeurs de z chacune des séries suivantes converge-t-elles?

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 2^n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n-1)!}$

Exercice N° 2: Localiser dans le plan des z toutes les singularités de chacune des fonctions suivantes :

(1) $\frac{z^3}{(z+1)^3}$ (2) $\frac{2z^3-z+1}{(z-4)^2(z-i)(z-1+2i)}$ (3) $\frac{\sin mz}{z^2+2z+2}$ (4) $\frac{1-\cos z}{z}$

Exercice N° 3:

Chercher la série de Laurent autour du point singulier indiqué pour chacune des fonctions suivantes. Préciser la nature de la singularité dans chaque cas :

$\frac{\sin z}{z-\pi}; z=\pi$, $z\cos\frac{1}{z}; z=0$, $\frac{z}{(z+1)(z+2)}; z=-1$, $\frac{1}{z(z+2)^3}; z=0,-2$

Exercice N° 4: Déterminer les résidus de chacune des fonctions suivantes aux pôles indiqués :

$\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}; z=2,i,-i$, $\frac{1}{z(z+2)^3}$, $\frac{ze^{zi}}{(z-3)^2}; z=3$, $ctgz; z=5\pi$

Exercice N° 5: Calculer l'intégrale suivante :

$\int_C \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz$ ou C est le cercle (a) $|z|=3/2$ (b) $|z|=10$

Exercice N° 6: Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

Exercice N° 7: Démontrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{7\pi}{50}$

Exercice N° 8: Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\sin\theta}$

Exercice N° 9: Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 3\theta d\theta}{5-4\cos\theta} = \frac{\pi}{12}$

Exercice N° 10: Démontrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}e^{-m}$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

$f(z_0) + \frac{(z-z_0)^1}{1!} f'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{2!} f''(z_0)$