

CHAPITRE 4

Théorème des Résidus

4.1 Résidus

Définition 4.1.1

Soit $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique au point z_0 , et $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ (Disque troué). On appelle résidu de f au point z_0 , le coefficient a_{-1} du développement de Laurent de f au voisinage de z_0 . Ce nombre est noté $\mathcal{R}es(f, z_0)$

Remarque :

Soit

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

le développement de Laurent de f au voisinage de z_0 , comme ce développement existe toujours pour les fonctions analytiques au voisinage de z_0 , donc a_{-1} existe toujours et est **FINI**.

Très important :

Dans l'exemple précédent on a trouvé que

$$f(z) = \frac{2}{(z+1)(z+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}} = \cdots - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - \frac{1}{3} + \frac{z}{3^2} + \cdots. \text{ Cela ne}$$

signifie pas que $\mathcal{R}es(f, 0) = 1$, car ce développement ne se fait pas au voisinage de 0 mais dans une couronne qui n'est pas un disque troué.

Par contre :

$$f(z) = \frac{2}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}z + \cdots$$

donne $\mathcal{R}es(f, 0) = 0$.

4.2 Résidu à l'infini

Si f admet un développement de Laurent pour z très grand, alors on peut toujours définir le résidu de f au voisinage de l'infini. Considérons l'expression $f(z) dz$, si z est

au voisinage de l'infini alors $\frac{1}{z}$ se trouve au voisinage de 0. Posons $t = \frac{1}{z}$; on a donc $f(z) dz = -\frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) dt$, d'où la définition :

Définition 4.2.1

Soit $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique au point z_0 , et $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} / |z| > R, R > 0\}$. On appelle résidu de f à l'infini, le nombre $\mathcal{R}es(f, \infty) = \mathcal{R}es(g, 0)$ avec $g(z) = -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$

Remarque 4.2.1

Posons : $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \Rightarrow -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n}{z^{n+2}}$
D'où l'on tire : $\mathcal{R}es(f, \infty) = -a_{-1}$, et donc :

$$\boxed{\mathcal{R}es(f, 0) + \mathcal{R}es(f, \infty) = 0}$$

Remarque 4.2.2 Si $f(z)$ se présente sous la forme $f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right)$ alors ;

$$\mathcal{R}es(f, \infty) = -g'(0)$$

4.2.1 Points singuliers des fonctions analytiques

Soit f une fonction analytique dans un ensemble ouvert connexe :

$\Omega = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < r, r > 0\} \subset \mathbb{C}$; soit a un point frontière de Ω , c'est à dire $|a - z_0| = r$. Si f peut être prolonger en une fonction analytique en a , on dira qu'alors que le point a est un point régulier, f est donc bornée au voisinage de a ; sinon c'est un point singulier.

4.2.1.1 types de singularités

Soit le développement de Laurent d'une fonction f au voisinage de a .

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}.$$

Trois cas se présentent alors :

1^{er} Cas :

Tous les d_n sont nuls. f est donc analytique en $z = a$. Le développement de Laurent coïncide avec la série de Taylor au voisinage de a .

2^{ème} Cas :

Un nombre fini de d_n n'est pas nul. Soit alors m le plus grand entier positif tel que $d_m \neq 0$. Alors $(z-a)^m f(z)$ est analytique au point a . On dira alors que a est une singularité d'ordre m , ou pôle d'ordre m ; (pôle simple, double, triple, ... pour $m = 1, 2, 3, \dots$).

3^{ème} Cas :

Un nombre infini de termes d_n n'est pas nul. a est appelé singularité essentielle de f . Pour tout entier positif m ; $(z-a)^m f(z)$ n'est pas borné au voisinage de a .

4.2.2 Théorème des résidus

Théorème 4.2.1

Soit Ω un ouvert simplement connexe, et $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Omega$.

Soit $\Omega' = \Omega \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ et

$$f : \Omega' \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \text{analytique.}$$

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega', \quad \text{un lacet quelconque dans } \Omega'.$$

alors

$$\boxed{\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, a_k) \cdot I(a_k, \gamma)}$$

Preuve :

Posons $\mathcal{D}_k = \{z \in \Omega \mid 0 < |z - a_k| < r_k\} \subset \Omega$, on choisira r_k aussi petit que possible de telle manière que $\mathcal{D}_k \cap \mathcal{D}_{k'} = \emptyset$ pour $k \neq k'$; et soit $\mathcal{C}_k = \mathcal{D}_k \setminus \{a_k\}$.

f étant analytique dans $\mathcal{C}_k$ admet donc un développement de Laurent dans cet ensemble :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,k}(z - a_k)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,k}(z - a_k)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n,k}}{(z - a_k)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,k}(z - a_k)^n + u_k(z).$$

Posons alors $g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^n u_k(z)$, donc :

• g est analytique dans Ω' .

• Si $z \in \mathcal{C}_k$ $g(z) = (f(z) - u_k(z)) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n u_j(z)$

comme pour $j \neq k$ le point a_k est régulier pour $u_j(z)$, il l'est aussi pour $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n u_j(z)$; d'autre

part, par définition le point a_k est régulier pour $f(z) - u_k(z)$ donc il l'est pour g . on peut donc prolonger g en une fonction analytique dans Ω tout entier, comme Ω est simplement connexe, le théorème de Cauchy donne

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 0,$$

d'où la formule.

4.2.2.1 Calcul pratique du résidu d'une fonction :

Soit $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ le développement de Laurent de f au voisinage de z_0 .

L'intégrale de f le long d'un lacet ne dépend donc que d'un coefficient dans le développement de Laurent; qui est a_{-1} . On va montrer que dans beaucoup de cas on peut déterminer ce coefficient sans passer par le développement de Laurent.

On va distinguer deux cas.

1^{er} Cas : z_0 est un pôle simple.

Soit alors $f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$

$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + (z - z_0)a_0 + a_1(z - z_0)^2 + \dots = \mathcal{R}es(f, z_0) + (z - z_0)a_0 + a_1(z - z_0)^2 + \dots$
et par passage à la limite, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{R}es(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).} \quad (4.1)$$

Si $f(z)$ se présente sous la forme,

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{où} \quad Q(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad Q'(z_0) \neq 0, \quad (4.2)$$

alors :

$$\boxed{\mathcal{R}es(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.} \quad (4.3)$$

Remarque 4.2.3 Si $a_{-1} = 0$, la singularité est appelée «singularité apparente», «pôle apparent», ou «fausse singularité».

Exemple 4.2.1

$f(z) = \frac{\sin z}{z}$, on a $\lim_{z \rightarrow 0} z.f(z) = 0$; 0 est une singularité apparente de f .

On peut le voir immédiatement en utilisant le développement de Laurent f .

On a, $f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$

On voit bien qu'il n'y a pas du tout de singularité.

Exemple 4.2.2

Donnons le résidu de $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^3 + 1}$; au point $z_0 = -1$.

$z_0 = -1$ est un pôle simple et f se présente sous la forme (4.2); on a donc,

$$\frac{e^{z^2}}{(z^3 + 1)'} = \frac{e^{z^2}}{3z^2} \implies \mathcal{R}es(f, -1) = \frac{e^{(-1)^2}}{3(-1)^2} = \frac{e}{3}.$$

2^{ème} Cas : a est un pôle multiple.

Soit m l'ordre de la singularité de z_0 . Écrivons :

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots \implies$$

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + a_{-m+2}(z - z_0)^2 + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \dots$$

En dérivant jusqu'à l'ordre $m - 1$, on obtient :

$$((z - z_0)^m f(z))^{(m-1)} = (m-1)!a_{-1} + a_0(m-1)!(z - z_0) + \dots;$$

d'où l'on obtient :

$$\boxed{\mathcal{R}es(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^m f(z))^{(m-1)}.} \quad (4.4)$$

Cette formule est intéressante seulement quand l'ordre est 2 ou 3 à la limite. Si l'ordre est grand 4 ou plus, mieux faut utiliser le développement de Laurent.

Remarque 4.2.4 Dans le cas où $f(z)$ est le rapport de deux fonctions $g(z)$ et $h(z)$ ayant z_0 comme zéros, alors il n'est pas facile de donner immédiatement l'ordre de la singularité de f . Dans ce cas, le procédé le plus sûr consiste dans le remplacement des fonctions $g(z)$ et $h(z)$ par un certain nombre de termes de leurs développements en série de Taylor au voisinage de z_0 .

Exemple 4.2.3

Trouver le résidu au point $z_0 = 0$ de la fonction $f(z) = \frac{1}{z^2 \cos(z-1)}$; 0 est un pôle d'ordre 2; on a :

$$\mathcal{R}es(f, 0) = \frac{1}{1!} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} ((z^2 f(z))') = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos(z-1)} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(z-1)}{\cos^2(z-1)} \right) = -\frac{\sin 1}{\cos^2 1}.$$

Exemple 4.2.4

Trouver le résidu au point $z_0 = i$ de la fonction $f(z) = \frac{\cos z}{(z^2 + 1)^3}$; i est un pôle d'ordre 3; on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}es(f, i) &= \frac{1}{2!} \cdot \lim_{z \rightarrow i} ((z-i)^3 f(z))'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{\cos z}{(z+i)^3} \right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{-(z+i) \sin z - 3 \cos z}{(z+i)^4} \right)' \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{6(z+i)^2 \sin z + (12 - (z+i)^2) \cos z}{(z+i)^5} \right) = \frac{(3 \operatorname{sh} 1 - 4 \operatorname{ch} 1) i}{16}. \end{aligned}$$

Exemple 4.2.5

Trouver le résidu au point $z_0 = 0$ de la fonction $f(z) = \frac{1+z^{10}}{z^6(4+z)}$; 0 est un pôle d'ordre 6;

Inutile de préciser qu'on n'utilisera pas la formule (4.4). On utilisera directement le développement de Laurent.

$$f(z) = \frac{1+z^{10}}{z^6(4+z)} = \frac{1}{4z^6} \cdot \frac{1+z^{10}}{(1+z/4)} = \frac{1}{4z^6} \cdot (1+z^{10})(1-z/4+z^2/4^2-z^3/4^3+\dots+(-1)^n z^n/4^n+\dots).$$

Dans ce produit, seul le coefficient de z^5 est utile, et qui est $-1/4^5$.

$$\text{D'où } \mathcal{R}es(f, 0) = 1/4 \cdot (-1)/4^5 = -\frac{1}{4^6} = -\frac{1}{4096}.$$

Exemple 4.2.6

Trouver le résidu au point $z_0 = 0$ de la fonction $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z - z}{(1 - \cos z)^2}$; ici il n'est pas facile de dire directement l'ordre de la singularité; on va utiliser la remarque (4.2.4).

$$f(z) = \frac{\operatorname{tg} z - z}{(1 - \cos z)^2} = \frac{\frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots}{\frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{24}z^6 + \dots} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{z} + \frac{34}{45}z + \frac{1229}{3780}z^3 + \dots$$

0 est donc une singularité simple et on a $\mathcal{R}es(f, 0) = \frac{4}{3}$.

Exemple 4.2.7

Trouver le résidu au point $z_0 = 0$ de la fonction $f(z) = z \cos^2 \frac{\pi}{z}$.

$$\text{On a } f(z) = z \cos^2 \frac{\pi}{z} = z \frac{1 + \cos(2\pi/z)}{2} = \frac{z}{2} \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)! z^{2n}} \right)$$

$$= z \left(1 - \frac{\pi^2}{z^2} + 1/3 \frac{\pi^4}{z^4} - 2/45 \frac{\pi^6}{z^6} + \dots \right) = z - \frac{\pi^2}{z} + \frac{\pi^4}{3z^3} - \frac{2\pi^6}{45z^5} + \dots$$

0 est donc une singularité essentielle, on a d'après ce développement de Laurent que $\mathcal{R}es(f, 0) = -\pi^2$.

4.3 Application du théorème des résidus à des calculs d'intégrales

4.3.1 Intégrale du type $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

On suppose que f soit la restriction à $\mathbb{R}$ d'une fonction f , qui est analytique dans un ensemble ouvert de la forme $D' = D - \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ où D contient le demi plan fermé $\text{Im } z \geq 0$, et les a_k sont des points du demi-plan ouvert $\text{Im } z > 0$.

On considère alors un lacet γ , juxtaposition $\gamma_1 \vee \gamma_2$ de deux chemins suivants :

$$\begin{aligned} \gamma_1 : t &\longrightarrow t, & \text{pour } -R \leq t \leq R. \\ \gamma_2 : t &\longrightarrow R e^{it}, & \text{pour } 0 \leq t \leq \pi. \end{aligned}$$

Où le nombre R est pris tel que $R > |a_k|$ pour tous les indices k ; il est immédiat que l'on a pour tout k , $\mathcal{J}(a_k, \gamma) = 1$.

Le théorème des résidus permet d'écrire,

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \mathcal{R}es(f, a_k).$$

Si de plus,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0,$$

par passage à la limite on a donc :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \mathcal{R}es(f, a_k).} \quad (4.5)$$

Premier cas :

$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont des polynômes premiers entre eux. Aucun des zéros de Q n'étant réel. Supposons en outre que l'on ait,

$$\deg Q \geq 2 + \deg P.$$

La formule (4.5) est valable, les a_k étant les zéros de Q tels que $\text{Im } a_k > 0$.

Exemple 4.3.1 Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}.$$

Remarquons que $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}$. Posons alors,

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)}.$$

Ici on a $P(z) = z^2$ et $Q(z) = 2(z^2 + 1)(z^2 + 9)$, et $\deg Q = 4 \geq 2 + \deg P = 2 + 2 = 4$.
les racines de $Q(z)$ sont $i, -i, 3i$ et $-3i$, donc aucune n'est réelle, la formule (4.5) est donc applicable.

Seuls i et $3i$ ont des parties imaginaires strictement positifs, d'où

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 dz}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)} = 2\pi i (\mathcal{R}es(f, i) + \mathcal{R}es(f, 3i))$$

i et $3i$ étant deux pôles simples de f , appliquons la formule (4.3).

Pour le pôle i on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}es(f, i) &= \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{z^2}{2(z^2 + 1)(z^2 + 9)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2}{2(z^2 + 1)(z^2 + 9)'} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2}{2((2z)(z^2 + 9) + (z^2 + 1)(2z))} = \frac{-1}{2(2i)(8)} = \frac{-1}{32i}. \end{aligned}$$

Pour le pôle $3i$ on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}es(f, 3i) &= \lim_{z \rightarrow 3i} (z - 3i) \frac{z^2}{2(z^2 + 1)(z^2 + 9)} = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{z^2}{2(z^2 + 1)(z^2 + 9)'} \\ &= \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{z^2}{2((2z)(z^2 + 9) + (z^2 + 1)(2z))} = \frac{-9}{2(6i)(-8)} = \frac{3}{32i}. \end{aligned}$$

D'où,

$$I = 2\pi i \left(\frac{-1}{32i} + \frac{3}{32i} \right) = \frac{\pi}{8}.$$

Exemple 4.3.2 Calculer l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2ix + 2 - 4i}.$$

Posons $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2iz + 2 - 4i}$. Les pôles de f sont simples et on a $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = -1 - 3i$, $\mathcal{I}m(z_2) < 0$, est à rejeter.

Les conditions sont toutes vérifiées, on a alors,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2ix + 2 - 4i} = 2\pi i \mathcal{R}es(f, 1 + i).$$

$$\mathcal{R}es(f, 1+i) = \lim_{z \rightarrow 1+i} (z - 1 - i) f(z) = \lim_{z \rightarrow 1+i} (z - 1 - i) \frac{1}{z^2 + 2iz + 2 - 4i} = \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{1}{2z + 2i} = \frac{1}{2 + 4i}.$$

Finalement,

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2 + 4i} = \frac{2\pi}{5} + i \frac{\pi}{5}.$$

Remarquons que, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2ix + 2 - 4i} = \frac{(x^2 + 2) - i(2x - 4)}{(x^2 + 2)^2 + (2x - 4)^2} = \frac{(x^2 + 2) - i(4 - 2x)}{x^4 + 8x^2 - 16x + 20}$,

d'où l'on déduit,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 2)dx}{x^4 + 8x^2 - 16x + 20} &= \frac{2\pi}{5}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(4 - 2x)dx}{x^4 + 8x^2 - 16x + 20} &= \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

Deuxième cas :

$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz}$, $m > 0$; où P et Q sont des polynômes premiers entre eux. Aucun des zéros de Q n'étant réel. Supposons en outre que l'on ait,

$$\deg Q \geq 1 + \deg P.$$

La formule (4.5) est valable, les a_k étant les zéros de Q tels que $\text{Im } a_k > 0$.

Exemple 4.3.3 calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

Soit $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 2}$, on a deux pôles simples $z_1 = -1 + i$, et $z_2 = -1 - i$ ce dernier est à rejeter.

$$\text{On a donc } \mathcal{R}es(f, -1 + i) = \lim_{z \rightarrow -1+i} (z + 1 - i)f(z) = \lim_{z \rightarrow -1+i} (z + 1 - i) \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 2} = \frac{e^{-1-i}}{2i}.$$

Finalement, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} \, dx}{x^2 + 2x + 2} = 2\pi i \frac{e^{-1-i}}{2i} = \pi e^{-1-i} = \pi e^{-1}(\cos 1 - i \sin 1)$ d'où l'on déduit,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x^2 + 2x + 2} = -\pi e^{-1} \sin 1,$$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + 2x + 2} = \pi e^{-1} \cos 1.$$

4.3.2 Intégrale du type $I = \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) \, d\theta$

Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle en x et en y qui n'a pas de pôles sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$, alors on a :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) \, d\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz} \quad (4.6)$$

L'égalité (4.6) est justifiée par le changement de variables suivant :

$$z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \implies z^{-1} = e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

d'où l'on tire

$$\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i} \text{ et } dz = i e^{i\theta} \, d\theta \iff d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

Posons : $f(z) = \frac{1}{iz} \cdot R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right)$, on a alors :

$$I = 2\pi i \sum \mathcal{R}es(f(z), z_k),$$

où la somme est étendue à tous les pôles de $f(z)$ tels que $|z_k| < 1$.

Exemple 4.3.4 Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta}, \quad \text{et } a > |b|.$$

Réponse :

$$f(z) = \frac{1}{iz} \cdot \frac{1}{a + b \frac{z - z^{-1}}{2i}} = \frac{2}{bz^2 + 2aiz - b}.$$

Les pôles de $\frac{2}{bz^2 + 2aiz - b}$ sont obtenus en résolvant $bz^2 + 2aiz - b = 0$ et sont donnés par,

$$z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}i \text{ et } z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}i,$$

seul z_1 est à l'intérieur du cercle, car $|z_1| = \left| \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right| = \left| \frac{b}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \right| < 1$, car $a < |b|$. Comme $z_1 z_2 = -1$, donc nécessairement $|z_2| > 1$.
ce sont deux pôles simples, le résidu en z_1 est donc ;

$$\mathcal{R}es(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{2}{bz^2 + 2aiz - b} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{2}{2bz + 2ai} = \frac{1}{i\sqrt{a^2 - b^2}},$$

d'où $I = 2\pi i \frac{1}{i\sqrt{a^2 - b^2}}$ finalement,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \text{et } a > |b|.$$

Exemple 4.3.5 Calculer :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta \, d\theta}{5 + 3 \cos \theta}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Réponse :

La formule de Moivre donne $\cos n\theta = \frac{z^n + z^{-n}}{2}$, d'où en substituant dans notre intégrale, on a :

$$f(z) = \frac{1}{iz} \cdot \frac{\frac{z^n + z^{-n}}{2}}{5 + 3 \frac{z + z^{-1}}{2}} = -i \frac{z^{2n} + 1}{z^n(3z^2 + 10z + 3)}.$$

Pôles de f :

$z_0 = 0$, est un pôle d'ordre n .

$3z^2 + 10z + 3 = (3z + 1)(z + 3) = 0$, deux pôles simples $z_1 = -\frac{1}{3}$ et $z_2 = -3$; seul $z_2 = -3$ a un module supérieur à 1, d'où :

$$I = 2\pi i (\mathcal{R}es(f(z), 0) + \mathcal{R}es(f(z), -1/3)).$$

Calcul des résidus :

Pour $z_1 = -1/3$, il s'agit d'un pôle simple, donc ;

$$\mathcal{R}es(f(z), -1/3) = \lim_{z \rightarrow -1/3} (z+1/3) \frac{-i(z^{2n}+1)}{z^n(3z+1)(z+3)} = \lim_{z \rightarrow -1/3} \frac{-i(z^{2n}+1)}{3z^n(z+3)} = -i(-1)^n \frac{1+3^{2n}}{8 \cdot 3^n}.$$

Pour $z_0 = 0$, qui est un pôle d'ordre n , il est préférable de faire le développement de Laurent de f au voisinage de 0.

$$\text{Remarquant que } f(z) = -i \frac{z^{2n}+1}{z^n(3z^2+10z+3)} = -i \frac{z^n}{(3z^2+10z+3)} - i \frac{1}{z^n(3z^2+10z+3)}.$$

$$\text{Comme } 0 \text{ n'est pas un pôle de } -i \frac{z^n}{(3z^2+10z+3)}, \text{ donc } \mathcal{R}es\left(-i \frac{z^n}{(3z^2+10z+3)}, 0\right) = 0.$$

$$\text{D'où } \mathcal{R}es(f(z), 0) = \mathcal{R}es\left(-i \frac{1}{z^n(3z^2+10z+3)}, 0\right).$$

On a $-i \frac{1}{z^n(3z^2+10z+3)} = \frac{1}{z^n} \frac{-i}{3z^2+10z+3} = \frac{-i}{z^n} \left(\frac{9}{24} \cdot \frac{1}{1+3z} - \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{1+z/3} \right)$. Un développement en série entière au voisinage de zéro donne :

$$\begin{aligned} \frac{9}{24} \cdot \frac{1}{1+3z} - \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{1+z/3} &= \frac{9}{24} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^n z^n - \frac{1}{24} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z/3)^n \\ &= \frac{1}{24} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(3^{n+2} - \frac{1}{3^n} \right) z^n, \text{ où } |z| < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

D'où l'on tire que ;

$$\mathcal{R}es(f(z), 0) = \frac{-i}{24} (-1)^{n-1} \left(3^{n+1} - \frac{1}{3^{n-1}} \right).$$

Finalement ;

$$I = 2\pi i \left(\frac{-i}{24} (-1)^{n-1} \left(3^{n+1} - \frac{1}{3^{n-1}} \right) - i(-1)^n \frac{1+3^{2n}}{8 \cdot 3^n} \right) = \frac{\pi (-1)^n}{2 \cdot 3^n}.$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta d\theta}{5+3\cos\theta} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4.3.3 Intégrale du type $I = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} Q(x) dx$.

α est un réel strictement positif, R une fraction rationnelle n'ayant pas de pôle réel positif ou nul, et telle que $Q(0) \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha |Q(x)| = 0$.

Si $Q = P/S$ ou P et S sont deux polynômes, on a $\deg P < \deg S - \alpha$.

On va considérer cette fois la fonction

$$f(z) = (-z)^{\alpha-1} Q(z)$$

$$(-z)^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\text{Log}(-z)} \text{ ou } \text{Arg}(\text{Log}(z)) \in]-\pi, \pi[.$$

On considère le lacet γ , juxtaposition $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \gamma_4$ de quatre chemins

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= e^{i\lambda t} & \text{pour } r \leq t \leq R \\ \gamma_2(t) &= R e^{it} & \text{pour } \lambda \leq t \leq 2\pi - \lambda \\ \gamma_3(t) &= -e^{-i\lambda t} & \text{pour } -R \leq t \leq -r \\ \gamma_4(t) &= r e^{i(2\pi-t)} & \text{pour } \lambda \leq t \leq 2\pi - \lambda. \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} Q(x) dx = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \sum \mathcal{R}es\left((-z)^{\alpha-1} Q(z), z_k\right)$$

où la somme est étendue à tous les pôles de la fraction $R(z)$.

Exemple 4.3.6 Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)}.$$

Réponse :

Ici on a $\alpha - 1 = -\frac{1}{3}$ et donc $\alpha = 2/3$. On a ici $Q(z) = \frac{1}{z+1}$, un seul pôle $z = -1$.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)} = \frac{\pi}{\sin(2/3\pi)} \mathcal{R}es \left((-z)^{-1/3} Q(z), -1 \right).$$

$$\mathcal{R}es \left((-z)^{-1/3} \frac{1}{z+1}, -1 \right) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) (-z)^{-1/3} \frac{1}{z+1} = 1,$$

$$I = \frac{\pi}{\sin(2/3\pi)} = \frac{\pi}{\sqrt{3}/2} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{2}.$$

4.3.4 Intégrale du type $I = \int_0^{\infty} Q(x) \operatorname{Log} x \, dx$.

Q une fraction rationnelle n'ayant pas de pôle réel positif ou nul, $Q(0) \neq 0$ et telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} xQ(x) = 0$.

En gardant le lacet précédent et en considérant le fonction $f(z) = Q(z) \operatorname{Log}^2 z$.

Les intégrales sur γ_2 et γ_4 tendent vers zéro lorsque $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$.

Et à la limite quand $\lambda \rightarrow 0$, $\log z = \operatorname{Log} x$ sur γ_1 , et $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} x + 2\pi i$ sur γ_3 .

On obtient ainsi la relation,

$$\int_0^{\infty} Q(x) \operatorname{Log}^2 x \, dx - \int_0^{\infty} Q(x) (\operatorname{Log} x + 2\pi i)^2 \, dx = 2\pi i \sum \mathcal{R}es \left(Q(z) \operatorname{Log}^2 z \right),$$

d'où

$$-2 \int_0^{\infty} Q(x) \operatorname{Log} x \, dx - 2\pi i \int_0^{\infty} Q(x) \, dx = \sum \mathcal{R}es \left(Q(z) \operatorname{Log}^2 z \right).$$

La somme est étendue à tous les pôles de la fraction $Q(z)$.

Dans le cas où, Q est une fonction réelle, on obtient deux intégrales.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} Q(x) \operatorname{Log} x \, dx &= -\frac{1}{2} \mathcal{R}e \left(\sum \mathcal{R}es \left(Q(z) \operatorname{Log}^2 z \right) \right), \\ \int_0^{\infty} Q(x) \, dx &= -\frac{1}{2\pi} \mathcal{I}m \left(\sum \mathcal{R}es \left(Q(z) \operatorname{Log}^2 z \right) \right). \end{aligned}$$

Remarque 4.3.1 En intégrant la fonction $Q(z) \operatorname{Log} z$, on obtiendrait de la même manière la formule

$$\int_0^{\infty} Q(x) \, dx = - \sum \mathcal{R}es \left(Q(z) \operatorname{Log} z \right).$$

Posons $I_n = \int_0^{\infty} Q(x) \operatorname{Log}^n x \, dx$, en intégrant la fonction $Q(z) \operatorname{Log}^{n+1} z$, on obtiendrait une relation de récurrence entre $I_n, I_{n-1}, \dots, I_1$, et I_0 .

$$\sum_{p=0}^n (2\pi i)^{n-p} \mathcal{C}_{n+1}^p I_p = - \sum \mathcal{R}es \left(Q(z) \operatorname{Log}^{n+1} z \right).$$

Exemple 4.3.7 Calculer :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x \, dx}{(x+1)^3}.$$

Réponse :

Ici $Q(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$, toutes les conditions sont vérifiées, d'où

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log}^2 x}{(x+1)^3} dx - \int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{Log} x + 2\pi i)^2}{(x+1)^3} dx = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z+1)^3} \operatorname{Log}^2 z, -1 \right),$$

ou encore,

$$- \int_0^{\infty} \frac{4\pi i \operatorname{Log} x - 4\pi^2}{(x+1)^3} dx = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z+1)^3} \operatorname{Log}^2 z, -1 \right).$$

Comme -1 est un pôle triple, pour le résidu on a donc,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z+1)^3} \operatorname{Log}^2 z, -1 \right) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \left((z+1)^3 \left(\frac{1}{(z+1)^3} \operatorname{Log}^2 z \right) \right)'' \\ &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} (\operatorname{Log}^2 z)'' = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1 - \operatorname{Log} z}{z^2} \\ &= \frac{1 - \operatorname{Log}(-1)}{(-1)^2} = \frac{1 - (0 + i\pi)}{1} = 1 - i\pi. \end{aligned}$$

Finalement,

$$-4\pi i \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{(x+1)^3} dx + 4\pi^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^3} = 2\pi i(1 - i\pi) = 2\pi i + 2\pi^2.$$

Conclusion,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x \, dx}{(x+1)^3} &= -\frac{1}{2} \\ \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^3} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$