CHAPITRE 3

INTÉGRABILITÉ DANS $\mathbb{C}$

Définition 3.0.1 Chemin :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Un chemin γ est une application continue, d'un intervalle fermé I de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point) dans Ω. γ est supposé être continûment dérivable par morceaux, c'est à dire qu'il est une primitive d'une fonction γ' continue par morceaux.

$$\gamma : I = [a, b] \longrightarrow \Omega, \quad a \neq b$$

Lorsque t décrit $[a, b]$, le point $\gamma(t)$ décrit dans le plan $\mathbb{C}$, une trajectoire $\gamma(I)$.
$\gamma(a)$ est appelé l'origine du chemin et $\gamma(b)$ son extrémité.

Exemple 3.0.1
— le chemin est un segment de droite.

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = a(1-t) + bt \end{array}$$

a et b deux complexes donnés. Le chemin est un segment de droite fermé d'origine le point d'affixe a et d'extrémité le point d'affixe b.
— le chemin est un cercle.

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = a + r\,\mathrm{e}^{it} \end{array}$$

$a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Le chemin est un cercle de centre le point d'affixe a, et de rayon r. On remarque que $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, le chemin est donc fermé.

Définition 3.0.2 Lacet :
Tout chemin où l'origine se confond avec l'extrémité est appelé un lacet.

Définition 3.0.3 Chemins opposés :
Etant donné un chemin γ de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$, on appelle chemin opposé à γ, et on note γ^0 le chemin :

$$\gamma^0 : t \longmapsto \gamma(a + b - t)$$

On a $\gamma^0(a) = \gamma(b)$ et $\gamma^0(b) = \gamma(a)$.
γ^0 est le chemin γ parcouru en sens inverse.

Définition 3.0.4 Juxtaposition de deux chemins :
Etant donnés deux chemins :

$$\begin{array}{lccc} \gamma_1 : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \gamma_2 : & [c,d] & \longrightarrow & \mathbb{C}, \end{array}$$

et tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$.
On appelle juxtaposition de γ_1 *et de* γ_2 *et on note* $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ *le chemin :* $\gamma : [a, b+d-c] \longrightarrow \mathbb{C}$, *tel que :*

$$\begin{cases} \gamma(t) = \gamma_1(t) & \text{pour} \quad t \in [a,b] \\ \gamma(t) = \gamma_2(t-b+c) & \text{pour} \quad t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

On a $\gamma(a) = \gamma_1(a)$ *et* $\gamma(b+d-c) = \gamma_2(d)$

Définition 3.0.5 Chemins équivalents :
Soient $\gamma_1 : I_1 = [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *et* $\gamma_2 : I_2 = [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ *deux chemins. On dit que* γ_1 *et* γ_2 *sont équivalents s'il existe une bijection croissante* $\varphi : I_2 \longrightarrow I_1$*, continue et continûment dérivable par morceaux, ainsi que la fonction réciproque* φ^{-1}*, telle que* $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))$ *dans* I_2.
$\gamma_1(I_1)$ *et* $\gamma_2(I_2)$ *sont alors les mêmes. les origines et les extrémités de* γ_1 *et* γ_2 *sont les mêmes.*

Exemple 3.0.2 γ_1 *est un chemin donné, considérons le chemin* γ_2 *tel que :*
$\gamma_2 : t \longrightarrow \gamma_1(\lambda t + \mu)$ *où* $\lambda > 0$ *et* μ *réel quelconque. les chemins* γ_1 *et* γ_2 *sont équivalents. remarquons que lorsque* t *parcourt le segment* $[a,b]$*, alors* $(\lambda t + \mu)$ *parcourt le segment* $[\lambda a + \mu, \lambda b + \mu]$*. Dans la pratique, il est bon de ne considérer que le chemin* $[0,1]$.

3.1 Intégration le long d'un chemin

$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin. Soit f une fonction complexe continue par morceaux : $f : \gamma([a,b]) \longrightarrow \mathbb{C}$, alors la fonction composée $t \longrightarrow f(\gamma(t)).\gamma'(t)$, est continue par morceaux dans $[a,b]$, par suite son intégrale dans cet intervalle est définie.

Définition 3.1.1 *On appelle intégrale de* f *le long du chemin* γ*, le nombre complexe :*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)).\gamma'(t)\,dt$$

Propriétés :
• Si f est telle que $|f(z)| \leq M$, pour tout $z \in \gamma(I)$, alors $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M\ell$, ℓ est la longueur du chemin γ.
• Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins équivalents alors :

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

• Si γ^0 et γ sont deux chemins opposés alors :

$$\int_{\gamma^0} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

• Si γ est la juxtaposition de deux chemins γ_1 et γ_2 alors :

$$\int_{\gamma=\gamma_1\vee\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Théorème important

Théorème 3.1.1 *$f : \mathfrak{B}(a,r) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, une fonction dérivable, alors pour tout lacet γ dans $\mathbb{C}$, on a*

$$\int_\gamma f'(z)\, dz = 0$$

Preuve :

$$\int_\gamma f'(z)\, dz = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_a^b f'(\gamma(t))\, d(\gamma(t)) = \left(f(\gamma(t))\right)_a^b = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$$

Théorème 3.1.2 *(A admettre) :*
Pour une fonction dérivable dans $D \subset \mathbb{C}$ admette une primitive dans D ; il faut et il suffit que pour tout lacet γ contenu dans D, on ait $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.
Lorsqu'il en est ainsi, toute primitive F de f dans D s'obtient de la façon suivante :

$$F(z) = C + \int_{\alpha(z)} f(u)\, du$$

où $\alpha(z)$ est un chemin quelconque contenu dans D, d'origine un point fixe (arbitraire) $z_0 \in D$ et d'extrémité z. La différence de deux primitives de f dans D est une constante.

Exemple 3.1.1 *Soit $D = \mathbb{C} - \{0\}$, et soit $f(z) = 1/z$ qui est dérivable pour z dans D. Si l'on considère le lacet $\gamma : t \longrightarrow \mathrm{e}^{it}$ défini dans $[0, 2\pi]$, qui est évidemment contenu dans D, on a*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i\, \frac{\mathrm{e}^{it}}{\mathrm{e}^{it}}\, dt = 2i\pi \neq 0$$

D'où f n'a pas de primitive dans D.

3.2 Notion d'homotopie

L'idée intuitive d'homotopie de deux chemins est celle d'une «déformation continue» faisant passer de l'un à l'autre.

Définition 3.2.1 *Soient D un ensemble ouvert de $\mathbb{C}$, $\gamma_1 : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{C}$ deux chemins contenus dans D, définis dans le même intervalle $I = [a, b]$. On appelle homotopie de γ_1 à γ_2 dans D, une application continue $\varphi : I \times J \longrightarrow D$, où $J = [c, d]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, telle que $\varphi(t, c) = \gamma_1(t)$ et $\varphi(t, d) = \gamma_2(t)$ pour tout $t \in I$.*

Remarque :
• : On dit que γ_1 est homotope à γ_2 s'il existe une homotopie de γ_1 à γ_2 dans D.
• : On définit de la même manière l'homotopie de deux lacets dans D.
Soit $\varphi : I \times J \longrightarrow D$, une homotopie de γ_2 à γ_1, et en plus $\varphi(a, s) = \varphi(b, s)$ $\forall s \in J$.

3.2.1 Ensemble simplement connexe :

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, on dit que D est simplement connexe si tout lacet γ est homotope à un point (un point=lacet constant).

Théorème 3.2.1 *$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable ; γ_1 et γ_2 deux lacets homotopes alors :*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$$

Corollaire 3.2.1 *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ simplement connexe et f une fonction complexe dérivable de D dans $\mathbb{C}$. Alors $\forall \gamma$ un lacet dans D, on a*

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0,$$

en particulier :

$$f \text{ admet une primitive } \iff \int_{\gamma} f(z)\, dz = 0,\ \forall \gamma \text{ lacet.}$$

3.2.2 indice d'un point par rapport à un lacet

Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ un lacet, et $z_0 \notin \gamma([a, b])$, on appelle indice du point z_0 par rapport à γ, le nombre

$$\mathcal{J}(z_0, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Proposition 3.2.1
• *Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins homotopes alors, $\mathcal{J}(z_0, \gamma_1) = \mathcal{J}(z_0, \gamma_2)$.*
• *$\mathcal{J}(z_0, \gamma)$ est toujours un nombre entier positif ou négatif.*

Preuve :
Montrons la deuxième assertion que $\mathcal{J}(z_0, \gamma) \in \mathbb{Z}$.
Soit $h(t) = \displaystyle\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds$, et donc $h(b) = \displaystyle\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds = 2\pi i \mathcal{J}(z_0, \gamma)$.
On a $h'(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}$, posons $g(t) = (\gamma(t) - z_0)\, e^{-h(t)}$, d'où
$g'(t) = [-h'(t)(\gamma(t) - z_0) + \gamma'(t)]\, e^{-h(t)} = [-\gamma'(t) + \gamma'(t)]\, e^{-h(t)} = 0$, g est donc constante. On a donc les équivalences suivantes

$$g(a) = g(b) \iff (\gamma(a) - z_0)\, e^{-h(a)} = (\gamma(b) - z_0)\, e^{-h(b)} \iff h(a) = h(b).$$

Comme $h(a) = \displaystyle\int_a^a \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds = 0$, la fonction exponentielle étant périodique de période $2\pi i$, on a alors $h(b) = 2k\pi i$ où $k \in \mathbb{Z}$.
Finalement $2k\pi i = 2\pi i.\mathcal{J}(z_0, \gamma) \iff \mathcal{J}(z_0, \gamma) = k \in \mathbb{Z}$.
Interprétation géométrique : Le nombre $\mathcal{J}(z_0, \gamma)$ désigne le nombre de tours que fait γ autour de z_0. Si k est positif, les tours se font dans le sens trigonométrique, sinon k est négatif.

3.3 Formule de Cauchy

Définition 3.3.1 *fonctions analytiques :*
Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite analytique au point z_0 si elle est développable en série entière au voisinage de z_0.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Théorème 3.3.1 *(De Cauchy)*
Soit Ω un ouvert simplement connexe, $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un lacet dans Ω. Pour toute fonction analytique $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ et pour tout $z_0 \notin \gamma([a, b])$ on a

$$f(z_0) \cdot I(z_0, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Preuve :
Posons :

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si} \quad z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si} \quad z = z_0 \end{cases}$$

f analytique dans Ω;

$f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \Longrightarrow$

$g(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) + (z - z_0)\dfrac{f''(z_0)}{2!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-1}$;

d'où g est analytique dans Ω qui est simplement connexe, on donc $\displaystyle\int_\gamma g(z)\, dz = 0 \Longrightarrow$

$$\int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz = 0 \Longleftrightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz = 0.$$

D'où :

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0) \cdot I(z_0, \gamma)$$

Corollaire 3.3.1 *Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, on a :*

$$f^{(n)}(z_0) \cdot I(z_0, \gamma) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

3.4 Généralisation de la formule de Cauchy

Définition 3.4.1 *On appelle couronne de centre a et de rayons r_1 et r_2 l'ensemble :*

$$\mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C} / 0 < r_1 < |z - a| < r_2\}$$

Proposition 3.4.1

1. *$\mathscr{C}$ n'est pas simplement connexe.*
2. *Soient ρ_1 et ρ_2 tels que $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$*

$$\begin{array}{rlcl} \gamma_1 : & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & a+\rho_1 \mathrm{e}^{it} \end{array} \quad \Bigg\| \quad \begin{array}{rlcl} \gamma_2 : & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & a+\rho_2 \mathrm{e}^{it} \end{array}$$

γ_1 et γ_2 sont homotopes .

Preuve :

1.) Soit $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ elle est analytique dans $\mathscr{C}$. Si $r_1 < r < r_2$ et $\gamma(t) = a + r\,\mathrm{e}^{it}$: $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{ri\,\mathrm{e}^{it}}{r\,\mathrm{e}^{it}}\,dt = 2\pi i \neq 0$$

2.) Soit

$$\begin{array}{rcl} \phi : [0,2\pi]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathscr{C} \\ (t,s) & \longmapsto & \phi(t,s) = (1-s)\gamma_1(t) + s\gamma_2(t) \end{array}$$

On a bien :

$$\begin{array}{rcl} \phi(t,0) & = & \gamma_1(t) \\ \phi(t,1) & = & \gamma_2(t) \\ \phi(0,s) & = & (1-s)\gamma_1(0) + s\gamma_2(0) \\ & = & (1-s)\gamma_1(2\pi) + s\gamma_2(2\pi) \\ & = & \phi(2\pi,s) \end{array}$$

γ_1 et γ_2 sont homotopes.

Théorème 3.4.1

$f : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique, et $\mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C}/0 < r_1 < |z-a| < r_2\}$. Alors pour tout z_0 vérifiant $0 < r_1 < r_1' < |z_0 - a| < r_2' < r_2$, on a :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

avec : $\gamma_1(t) = a + r_1'\,\mathrm{e}^{it}$ et $\gamma_2(t) = a + r_2'\,\mathrm{e}^{it}$

Preuve :

Posons

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si} \quad z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si} \quad z = z_0 \end{cases}$$

g est analytique, comme γ_1 et γ_2 sont homotopes, alors :

$$\int_{\gamma_1} g(z)\,dz = \int_{\gamma_2} g(z)\,dz \Longleftrightarrow \int_{\gamma_1} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma_2} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - f(z_0)\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - f(z_0)\int_{\gamma_2} \frac{1}{z-z_0}\,dz$$

$\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-z_0}\,dz$ est nulle puisque z_0 est à l'extérieur de γ_1.

Théorème 3.4.2

Soient $\mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C}/0 < r_1 < |z-a| < r_2\}$et $f : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, *et soit γ est le lacet* $\begin{array}{rcll} \gamma : [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} & \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = a + r\,\mathrm{e}^{it} & r_1 < r < r_2 \end{array}$

alors pour tout $z \in \mathscr{C}$ on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}$$

avec :

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad \text{et} \qquad d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)(z-a)^{n-1}\, dz$$

Ou sous forme condensé :

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$$
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)(z-a)^{-n-1}\, dz$$

3.5 Développement de Laurent

Définition 3.5.1

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite développable en série de Laurent au voisinage de $a \in \Omega$ si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}$$

pour tout $z \in \mathscr{C} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle/\, 0 < r_1 < |z-a| < r_2 \right\}$

Remarque :

Posons $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$, et soit $\gamma(t) = a + r\,\mathrm{e}^{it} = z \quad r_1 < r < r_2$

$f(\gamma(t)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^n\,\mathrm{e}^{int}$; soit $p \in \mathbb{Z}$; on a alors :

$$\int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\,\mathrm{e}^{-ipt}\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^n\,\mathrm{e}^{int} \right) \mathrm{e}^{-ipt}\, dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^n \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it(n-p)}\, dt = 2\pi \cdot a_p \cdot r^p$$

$\Longrightarrow a_p = \dfrac{1}{2\pi r^p} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\,\mathrm{e}^{-ipt}\, dt \Longrightarrow$ que les cœfficients de Laurent sont uniques et par conséquent, le développement de Laurent d'une fonction est unique.

Exemples :

1^{er} :

Donner le développement de Laurent de $f(z) = \dfrac{2}{(z+1)(z+3)}$ dans la couronne $\mathscr{C} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle/\, 1 < |z| < 2 \right\}$.

Réponse :

Écrivons que $f(z) = \dfrac{2}{(z+1)(z+3)} = \dfrac{1}{z+1} - \dfrac{1}{z+3}$.

- $|z| > 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{|z|} < 1$, d'où

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

- $|z| < 3 \Longrightarrow \frac{|z|}{3} < 1$, d'où

$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$

finalement pour $1 < |z| < 3$ on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{z^n}{3^{n+1}}\right)$$