Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès. Semestre-4
Faculté des Sciences de l'Ingénieur. Chapitres N° 3 et N° 4
2ème Année L.M.D-Sciences & Techniques. Fiche De T.D.° 3

Calcul Des Résidus. Développement De Laurent. Applications Aux Intégrales.

Exercice 1

1. Montrer que si f est une fonction paire, alors $\mathscr{R}es(f,-a) = -\mathscr{R}es(f,a)$.
   Si f est une fonction paire, que vaut alors $\mathscr{R}es(f,0)$?
2. Montrer que si f est une fonction impaire, alors $\mathscr{R}es(f,-a) = \mathscr{R}es(f,a)$.
3. Montrer que si $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$, alors $\mathscr{R}es(f,\overline{a}) = \overline{\mathscr{R}es(f,a)}$.

Exercice 2

Calculer les résidus suivants :

$$\mathscr{R}es\left(\frac{1}{z^4-1},\,1\right), \quad \mathscr{R}es\left(\frac{1}{z^4-1},\,0\right), \quad \mathscr{R}es\left(\frac{1}{z^2(z+1)^3},\,0\right), \quad \mathscr{R}es\left(\frac{1}{z^2(z+1)^3},\,-1\right),$$

$$\mathscr{R}es\left(\frac{\operatorname{tg} z - z}{(1-\cos z)^2},\,0\right), \quad \mathscr{R}es\left(\frac{z^3}{\sin(1/z^2)},\,0\right), \quad \mathscr{R}es\left(\frac{\sin^3 z \sin(1/z)}{\cos^7 z},\,0\right), \quad \mathscr{R}es\left(\frac{z^5}{z^4-\sin^4 z},\,\infty\right).$$

Exercice 3

Donner le développement en série de Laurent de : $f(z) = \dfrac{5z+7}{(3z+1)(2z-5)}$, dans chacun des ensembles ;

$\mathscr{A} = \{z \in \mathbb{C},\ /\ 1/3 < |z| < 5/2\}$, $\mathscr{B} = \{z \in \mathbb{C},\ /\ |z| < 1/3\}$, $\mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C},\ /\ |z| > 5/2\}$.

Exercice 4

Déterminer le développement en série de Laurent des fonctions suivantes au voisinage des singularités indiquées. Donner le résidu en chaque singularité.

$f(z) = \dfrac{e^z}{(z+1)^2}$, $z_0 = -1$. $\quad g(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$, $z_0 = 0$. $\quad h(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+3)}$, $z_0 = -3$.

$k(z) = \dfrac{z+2}{(z+1)^3(z-1)}$, $z_0 = 1$. $\quad \ell(z) = (z+2)^2 \sin\dfrac{1}{z+1}$, $z_0 = -1$.

Exercice 5

Utiliser le théorème des résidus pour calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+5x+7}, \qquad B = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2}, \qquad C = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)}.$$

$$D = \int_0^{\infty} \frac{\cos 5x\ dx}{x^2+1}, \qquad E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x\ dx}{x^2+2x+5}, \qquad F = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos 2x\ dx}{x^2-4x+5}.$$

$$G = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}, \quad H = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{9+7\cos\theta}, \qquad I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta\ d\theta}{3+\cos\theta+2\sin\theta}.$$

$$J = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}, \qquad K = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ dx}{(x+2)(x+4)}, \quad L = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x^2+4)}.$$

$$M = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x\ dx}{(x+1)^2}, \qquad N = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x\ dx}{x^2+2x+2}, \qquad P = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x\ dx}{(x^2+1)^2}.$$