Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès. Semestre-4
Faculté des Sciences de l'Ingénieur. Chapitres N° 2 et N° 3
2ème Année L.M.D-Sciences & Techniques. Fiche De T.D.° 2

Fonctions Élémentaires & Formule De Cauchy.

Exercice 1

Démontrer les formules suivantes :

$1 \bullet \sin iz = i \operatorname{sh} z,$ $2 \bullet \operatorname{ch} iz = \cos z,$

$3 \bullet \operatorname{sh}\left(z + \frac{\pi i}{2}\right) = i \operatorname{ch} z,$ $4 \bullet \operatorname{th}\left(z + \frac{\pi i}{2}\right) = \coth z,$

$5 \bullet \operatorname{ch}(z + z') = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} z' + \operatorname{sh} z \operatorname{sh} z'.$

Exercice 2

1. Calculer l'exponentielle des nombres suivants, $3 - i\pi,\ 1 + i,\ -1,\ \mathrm{e}^{i}$.
2. Calculer le logarithme des nombres suivants, $3 + 4i, 1,\ -1,\ -5 + 12i$.
3. Calculer en utilisant la détermination principale du logarithme :
$\mathscr{X} = \operatorname{Log} ab - \operatorname{Log} a - \operatorname{Log} b$, où a et b sont deux réels strictement négatifs.

Exercice 3

Déterminer le module des fonctions complexes suivantes :

$$f(z) = \sin z, \qquad g(z) = \cos z, \qquad h(z) = \operatorname{sh} z, \qquad k(z) = \operatorname{tg} z.$$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\sin z = 3, \qquad \cos z = \operatorname{ch} z, \qquad e^{z} = 1 + i, \qquad e^{iz} + \sin z = 0.$$

Exercice 5

Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

$\displaystyle\int_{\gamma_1} |z|\ dz$ où γ_1 est la ligne polygonale $[0, 1 + i, 2]$.

$\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z - 3}$ où $\gamma_2(t) = 2 + 5\,\mathrm{e}^{it},\ \ t \in [0, 2\pi]$.

$\displaystyle\int_{\gamma_3} \frac{e^{2z}\ dz}{(z+1)^4}$ où $\gamma_3(t) = 3\,\mathrm{e}^{-3it},\ \ t \in [0, 2\pi]$.

$\displaystyle\int_{\gamma_4} \frac{(\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2)dz}{(z-2)(z-4)}$ où $\gamma_4(t) = 3\,\mathrm{e}^{it},\ \ t \in [0, 2\pi]$.

$\displaystyle\int_{\gamma_5} \frac{\sin 3z\ dz}{(z^2+\pi)^2}$ où γ_5 est le polygone parcouru 25 fois :
$[-1 - 2i, 1 - i, 1 + i, -1, -1 - 2i]$.

$\displaystyle\int_{\gamma_6} z\,\mathrm{e}^{z^2}\ dz$ où γ_6 est le polygone parcouru une fois :
$[0, -1 + 2i, 2i + 3, i, 1 - i, 2]$.