



Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès.

Semestre-4

Faculté des Sciences de l'Ingénieur.

Chapitre N°0.

2<sup>ème</sup> Année L.M.D-Sciences & Techniques.

T.D. N°0

**Les Nombres Complexes.**

**Exercice ①**

Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants,

$$\mathcal{A} = 1 + (3 + 2i)^4, \quad \mathcal{B} = -\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}, \quad \mathcal{C} = \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^8, \quad \mathcal{D} = \frac{1 + ki}{2k + i(k^2 - 1)}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

**Exercice ②**

Donner le module et l'argument des nombres complexes suivants,  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\mathcal{L} = (\sin x + i \cos x)^n, \quad \mathcal{M} = 1 + \cos x + i \sin x, \quad \mathcal{N} = \left( \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x} \right)^n.$$

**Exercice ③**

Donner le module et l'argument des nombres complexes suivants,

$$\mathcal{P} = 1 + i, \quad \mathcal{R} = 1 + i\sqrt{3}, \quad \text{et} \quad \mathcal{T} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}.$$

En déduire  $\sin \frac{\pi}{12}$  et  $\cos \frac{\pi}{12}$ . Donner les racines de l'équation  $z^3 = 16(1 + i)$  sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.

**Exercice ④**

Montrer que  $|z| = 1$  si et seulement si  $\bar{z} = \frac{1}{z}$ . En déduire que si  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois nombres complexes de module 1, alors le nombre  $\mathcal{P} = \frac{a + b}{1 + ab}$  est réel; et  $|a + b + c| = |ab + bc + ac|$ .

**Exercice ⑤**

Montrer que  $\forall a, b \in \mathbb{C}$ , les égalités suivantes sont vérifiées :

1.  $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$ .
2.  $|a\bar{b} + 1|^2 + |a - b|^2 = (1 + |a|^2)(1 + |b|^2)$ .
3.  $|a\bar{b} - 1|^2 - |a - b|^2 = (|a|^2 - 1)(|b|^2 - 1)$ .

**Exercice ⑥**

Donner l'équation de la droite passant par les deux points  $A(a)$  et  $B(b)$ ,  $a$  et  $b$  deux nombres complexes donnés.

**Exercice ⑦**

Donner l'équation du cercle de centre  $c \in \mathbb{C}$ , et de rayon  $r > 0$ . Réciproquement, étudier l'ensemble  $E = \{z \in \mathbb{C}, \text{ tel que } z\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + b = 0\}$ , où  $a \in \mathbb{C}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

**Exercice ⑧**

Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} E &= \{z \in \mathbb{C}, / \operatorname{Re}(1/z) = 1/a, a > 0\}, & F &= \{z \in \mathbb{C}, / \operatorname{Im}[(z-1)/(z+1)] = 0\}, \\ G &= \{z \in \mathbb{C}, / z = r e^{it} + z_0, r > 0, t \in \mathbb{R}, z_0 \in \mathbb{C}\}, & H &= \{z \in \mathbb{C}, / |z - 2 + 3i| = 1\}, \\ K &= \{z \in \mathbb{C}, / |z - 2 + 3i| = |z + i|\}, & L &= \{z \in \mathbb{C}, / \operatorname{Re} z^2 > \operatorname{Im} z^2\}, \\ M &= \{z \in \mathbb{C}, / z = (5 - i)t + 1, \text{ où } t \in [0, 5]\}, & N &= \{z \in \mathbb{C}, / 2 \leq |z - 2 + 3i| \leq 4\}, \\ P &= \{z \in \mathbb{C}, / \pi/4 \leq \arg(z + i) \leq \pi/2\}, & R &= \{z \in \mathbb{C}, / (2 - i)z + (2 + i)\bar{z} = 1\}. \end{aligned}$$