

EXAMEN DE MATH4

Exercice N° 1: (06 pts)

Déterminer une fonction f holomorphe de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$, telle que $\Re(f(z)) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$, et $f(1+i) = \pi/4$?

Exercice N° 2: (06 pts)

1. Chercher la série de Laurent de la fonction $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$ autour du point $z = 0$ (indiquer le type de singularité)
2. Utiliser les formules intégrales de Cauchy pour calculer l'intégrale : $\oint_C \frac{\cos z}{z^2} dz$ ou C est le cercle $|z| = 4$

Exercice N° 3 : (08 pts)

- Utiliser le théorème des résidus pour calculer l'intégrale suivant: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos 2x}{x^2-4x+5} dx$
- Dédurre $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\sin 2x}{x^2-4x+5} dx$

Bonne chance

Don 2 =
- sin 2

Correction Examen MATH 4 2012

EXN°1: soit $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$
 $f(z)$ est holomorphe si $u(x,y)$ est harmonique
 Vérifions que $u(x,y) = \text{Arctg} \frac{y}{x}$ est harmonique
 ($\Delta u(x,y) = 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow u(x,y) \text{ est harmonique}$$

donc elle existe une fonction $f(z)$ holomorphe telle que $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

$$f \text{ holomorphe} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad (1) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{On trouve } v(x,y) = -\frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + C \quad (1)$$

$$f(z) = \text{Arctg} \frac{y}{x} + i \left(-\frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + C \right)$$

$$f(i+1) = \pi/4 = 0 \Rightarrow C = \frac{i}{2} \ln 2$$

$$\Rightarrow f(z) = \text{Arctg} \frac{y}{x} - \frac{i}{2} \ln \frac{x^2+y^2}{2}$$

$$\text{EXN}^\circ 2: f(z) = \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \dots \right)$$

$$\textcircled{1} f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^4}{6!} + \frac{z^6}{8!} - \dots$$

$\textcircled{0.5}$ P. Principale Partie Analytique

$z=0$ est un point singulier d'ordre 2 $\textcircled{0.5}$

1) $z=0 \Rightarrow 0 < \arg z < 2\pi \Rightarrow z=0$ est à l'intérieur de C $\textcircled{1}$

on utilise les formules intégrales de Cauchy

$$I = \oint_C \frac{\cos z}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(0) \quad \textcircled{1}$$

$$\text{avec } f(z) = \cos z \Rightarrow f'(z) = -\sin z \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$\Rightarrow I = 0 \quad \textcircled{0.5}$$

$$\text{EXN}^\circ 3: \text{soit } I = \oint_C f(z) dz, f(z) = \frac{(z-1)e^{iz}}{z^2-4z+5}$$

$f(z)$ a deux pôles simples en:

$$z_1 = 2-i \quad \text{et} \quad z_2 = 2+i$$

on choisit C la courbe fermée contenant le segment $[-R, R]$ et le demi-cercle Γ parcouru dans sens positif (figure)

seulement $z_2 = 2+i$ à l'intérieur de C'

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, 2+i)$$

on fait $\lim_{R \rightarrow +\infty}$ $\textcircled{0.5}$

$$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2-4x+5} dx = 2\pi i \text{Res}(f, 2+i) \quad \textcircled{0.5}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 2+i) &= \lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{(z-1)e^{iz}}{z-2-i} = \frac{1}{2i} (1+i) e^{i(2+i)} \\ &= \frac{e^{-2}}{2i} (1+i) (\cos 4 + i \sin 4) \\ &= \frac{e^{-2}}{2i} ((\cos 4 - \sin 4) + i(\cos 4 + \sin 4)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2-4x+5} dx = \pi e^{-2} (\cos 4 - \sin 4) + i \pi e^{-2} (\cos 4 + \sin 4)$$

$$\text{et on a } \cos 2x = \text{Re } e^{i2x} \quad \textcircled{0.5}$$

$$\sin 2x = \text{Im } e^{i2x} \quad \textcircled{0.5}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1) \cos 2x}{x^2-4x+5} dx = \text{Re}(I) = \pi e^{-2} (\cos 4 - \sin 4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1) \sin 2x}{x^2-4x+5} dx = \text{Im}(I) = \pi e^{-2} (\cos 4 + \sin 4)$$