Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès.
Faculté des Sciences de l'Ingénieur.
$2^{\text{ème}}$ Année L.M.D. Sciences & Techniques.

EXAMEN DE T.D. (**2 Heures**).

Semestre 4 : Fonctions Complexes à Une Variable Complexe.

Exercice 1

Dire si la la fonction suivante est harmonique ;

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin(2xy).$$

SOLUTION :
Calculons le laplacien de f,

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = (2x\sin(2xy) + 2y\cos(2xy))\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}, \\ \\ f''_{x^2}(x,y) = \Big((4x^2-4y^2+2)\sin(2xy) + 8xy\cos(2xy)\Big)\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_y(x,y) = (-2y\sin(2xy) + 2x\cos(2xy))\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}, \\ \\ f''_{y^2}(x,y) = \Big((-4x^2+4y^2-2)\sin(2xy) - 8xy\cos(2xy)\Big)\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}. \end{cases}$$

Finalement, $\Delta f(x,y) = f''_{x^2}(x,y) + f''_{y^2}(x,y) = 0$, f est donc harmonique dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Dire si la fonction suivante est dérivable de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$? ($z = x + iy$ où x et y sont deux réels).

$$f(z) = (2x^2 - 3x - 3iy) + i(4xy + 2iy^2).$$

SOLUTION :
$f(z) = (2x^2 - 3x - 3iy) + i(4xy + 2iy^2) = (2x^2 - 3x - 2y^2) + i(4xy - 3y) = P(x,y) + iQ(x,y)$.
f dérivable nécessite que P et Q vérifient les deux conditions de Cauchy-Riemann ; soit

$$\begin{cases} P'_x(x,y) = Q'_y(x,y), \\ \\ P'_y(x,y) = -Q'_x(x,y). \end{cases}$$

Or on a, $P'_x(x,y) = (2x^2-3x-2y^2)'_x = 4x-3$, et $Q'_y(x,y) = (4xy-3y)'_y = 4x-3$,
et on a aussi, $P'_y(x,y) = (2x^2-3x-2y^2)'_y = -4y$, et $Q'_x(x,y) = (4xy-3y)'_y = 4y$,
les deux conditions étant vérifiées, f est dérivable dans $\mathbb{C}$.
(*Remarque :* $f(z) = 2z^2 - 3z$).

$\mathscr{E}$**xercice** (3)

Calculer les nombres suivants ;(chaque nombre sera donné sous la forme $\alpha + i\beta$ où α et β sont des réels.).

1. $A = \mathrm{e}^{2-i\operatorname{Log}5}$ 2. $B = \operatorname{Log}(2+7i)$ 3. $C = \sin(2-3i)$.

SOLUTION :

1. $A = \mathrm{e}^{2-i\operatorname{Log}5} = \mathrm{e}^2\cdot\mathrm{e}^{-i\operatorname{Log}5} = \mathrm{e}^2\Big(\cos(-\operatorname{Log}5) + i\sin(-\operatorname{Log}5)\Big)$
$= \mathrm{e}^2\Big(\cos(\operatorname{Log}5) - i\sin(\operatorname{Log}5)\Big) = \mathrm{e}^2\Big(\cos(\operatorname{Log}5)\Big) - i\,\mathrm{e}^2\Big(\sin(\operatorname{Log}5)\Big)$

2. $B = \operatorname{Log}(2+7i) = \operatorname{Log}|2+7i| + i\operatorname{Arg}(2+7i) = \operatorname{Log}\sqrt{4+49} + i\left(\operatorname{Arctg}\dfrac{7}{2} + 2k\pi\right),\quad k\in\mathbb{Z}$
$= \operatorname{Log}\sqrt{53} + i\left(\operatorname{Arctg}\dfrac{7}{2} + 2k\pi\right),\quad k\in\mathbb{Z}.$

3. $C = \sin(2-3i) = C = \sin 2\cos(3i) - \cos 2\sin(3i) = \sin 2\operatorname{ch}3 - i\cos 2\operatorname{sh}3.$

$\mathscr{E}$**xercice** (4)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\sin z = 3,$ 2. $\operatorname{Log} z = i.$

SOLUTION :

1. $\sin z = 3 \iff \dfrac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{2i} = 3 \iff \mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz} = 6i$, posons $\mathrm{e}^{iz} = t \neq 0$, on a $t^2 - 6it - 1 = 0$; comme $\Delta' = -8 = (2i\sqrt{2})^2 \neq 0$, donc deux solutions distinctes ;

$$\begin{cases} t_1 = \left(3+2\sqrt{2}\right)i, \\ t_2 = (3-2\sqrt{2})i. \end{cases}$$

1$^{\text{ère}}$ solution, $t_1 = (3+2\sqrt{2})i$, on a donc,
$\mathrm{e}^{iz_1} = (3+2\sqrt{2})i \iff iz_1 = \operatorname{Log}(3+2\sqrt{2})i = \operatorname{Log}|(3+2\sqrt{2})i| + i\operatorname{Arg}((3+2\sqrt{2})i)$
$= \operatorname{Log}(3+2\sqrt{2}) + i\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$; où $k\in\mathbb{Z}$.

Finalement, $z_1 = \left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) - i\operatorname{Log}(3+2\sqrt{2}) = \left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) + i\operatorname{Log}(3-2\sqrt{2})$; où $k\in\mathbb{Z}$.

2$^{\text{ème}}$ solution, $t_2 = (3-2\sqrt{2})i$, on a donc,
$\mathrm{e}^{iz_2} = (3-2\sqrt{2})i \iff iz_2 = \operatorname{Log}(3-2\sqrt{2})i = \operatorname{Log}|(3-2\sqrt{2})i| + i\operatorname{Arg}((3-2\sqrt{2})i)$
$= \operatorname{Log}(3-2\sqrt{2}) + i\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$; où $k\in\mathbb{Z}$.

Finalement, $z_2 = \left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) - i\operatorname{Log}(3-2\sqrt{2}) = \left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) + i\operatorname{Log}(3+2\sqrt{2})$; où $k\in\mathbb{Z}$.

2. $\operatorname{Log} z = i \iff \operatorname{Log}|z| + i\operatorname{Arg} z = i \iff \begin{cases}\operatorname{Log}|z| = 0, \\ \operatorname{Arg} z = 1.\end{cases} \iff \begin{cases}|z| = 1, \\ \operatorname{Arg} z = 1.\end{cases}$

Finalement,

$$z = \cos 1 + i\sin 1.$$

(*Remarque : On pouvait écrire aussi que,* $\operatorname{Log} z = i \Longrightarrow z = \mathrm{e}^i = \cos 1 + i\sin 1$.)

$\mathscr{E}$xercice (5)

Démontrer la formule suivante ;

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

SOLUTION :

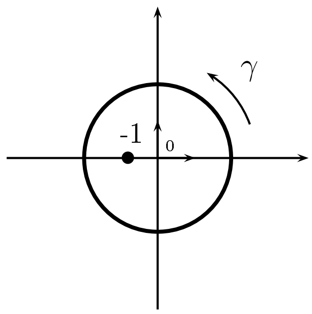
$$\begin{aligned}\forall z \in \mathbb{C},\ \sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2iz} - 2 + \mathrm{e}^{-2iz}\right) + \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2iz} + 2 + \mathrm{e}^{-2iz}\right) = 1\end{aligned}$$

$\mathscr{E}$xercice (6)

Calculer l'intégrale suivante ;

$$\int_\gamma \frac{(z-1)^2 \cos 2z \; dz}{(z+1)^2(z+5)} \quad \text{où} \quad \gamma(t) = 2\,\mathrm{e}^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

SOLUTION :



La fonction à intégrer possède deux singularités, (-1) et (-5). Seul le point $z_0 = -1$ est à l'intérieur du lacet γ ; posons alors $f(z) = \dfrac{(z-1)^2 \cos 2z}{(z+5)}$, qui est dérivable à l'intérieur de γ. On a donc,

$$\int_\gamma \frac{f(z)\ dz}{(z+1)^2} = 2\pi i \mathscr{I}(-1, \gamma) \frac{f'(-1)}{1!}.$$

Comme $t \in [0, 2\pi]$, on fait alors un seul tour autour de $z_0 = -1$, d'où $\mathscr{I}(-1, \gamma) = 1$.

La dérivée de f est alors,

$$f'(z) = \frac{(z-1)\Big((z+11)\cos z - (z-1)(z+5)\sin z\Big)}{(z+5)^2}$$

$f'(-1) = -\dfrac{5\cos 1 + \sin 1}{4}$, et finalement,

$$\int_\gamma \frac{(z-1)^2 \cos 2z \; dz}{(z+1)^2(z+5)} = -\frac{\pi i}{2}(5\cos 1 + \sin 1)$$

$\mathscr{E}$**xercice** 7

Donner le développement en série de Laurent de : $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-1)}$, dans l'ensemble ;

$$\mathscr{A} = \{z \in \mathbb{C},\ /\ |z| < 1\}\,.$$

SOLUTION :

Deux méthodes sont possibles, citons en premier la meilleure.

$1^{\text{ère}}$ méthode :

On a $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-1)} = \dfrac{-1}{1-z^2} = (-1)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -z^{2n}$, où $|z^2| < 1 \Longleftrightarrow z \in \mathscr{A}$.

$2^{\text{ème}}$ méthode :

Une décomposition de f en éléments simples donne,

$f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-1)} = \dfrac{-1/2}{1-z} + \dfrac{-1/2}{1+z} = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$, $z \in \mathscr{A}$.

Finalement pour $z \in \mathscr{A}$;

$f(z) = -\dfrac{1}{2}(1+z+z^2+z^3+\cdots) - \dfrac{1}{2}(1-z+z^2-z^3+\cdots) = -(1+z^2+z^4+\cdots) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} -z^{2n}$.