Chapitre III

Dynamique du point matériel

I. Généralités

La cinématique a pour objet l'étude des mouvements des corps en fonction du temps, sans tenir compte des causes qui les provoquent.

La dynamique est la science qui étudie (ou détermine) les causes des mouvements de ces corps

II. Le principe d'inertie (1ière loi de Newton)

C'est Galilée qui a le premier suggéré ce principe. Il constitue la première loi de Newton et qui s'énonce comme suit :

« Tout objet conserve son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme en l'absence de forces agissant sur lui »

Cette 1ière loi peut aussi s'énoncer :

Si aucune force n'agit sur un objet ou si la force résultante est nulle,

- Un objet au repos reste au repos ;
- Un objet en mouvement continue à se mouvoir à vitesse constante.

Remarque

Cette 1^{ière} loi de Newton, telle qu'elle a été énoncée, ne s'applique pas à un observateur soumis à une accélération. Elle nous amène à définir un référentiel d'inertie.

III. Référentiels d'inertie ou galiléens

On appelle référentiel d'inertie, un système de référence (ou repère) dans lequel la première loi de Newton est applicable. D'après cette définition, un référentiel d'inertie n'existe pas ; on ne dispose que de référentiels approximatifs.

Exemples

Pour la plupart des expériences que l'on peut réaliser sur terre, le repère au sol constitue un bon repère d'inertie, alors que pour le mouvement d'un point ce repère lié au sol n'est pas un repère d'inertie.

Si l'on choisit un système d'axes liés au *Soleil* et dirigés vers certaines étoiles, le mouvement d'une planète du système solaire devient simple (*référentiel de COPERNIC*). Pour ce mouvement le repère lié au *Soleil* est un bon repère d'inertie.

Remarque

✓ Tout système de coordonnées qui se déplace à vitesse constante par rapport à un référentiel d'inertie, peut être lui-même considéré comme un référentiel d'inertie.

✓ Les vitesses et les accélérations des corps, mesurées dans les référentiels galiléens, sont dites absolues et celles mesurées dans les référentiels non galiléens sont dites relatives.

IV. Masse et centre d'inertie

Masse

La masse d'un système caractérise la quantité de matière qu'il renferme. Elle est invariable dans la mécanique newtonienne. Dans la mécanique relativiste, elle dépend de la vitesse à travers l'expression :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

avec:

m_0, la masse au repos

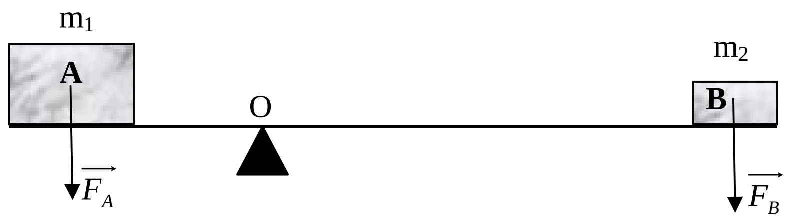
m, la masse à la vitesse v.

c, vitesse de la lumière, $c \approx 3\ 10^8\ m.s^{-1}$

<u>Centre d'inertie ou Barycentre</u>

Appelé aussi moment d'inertie ou centre de gravité. Il a été défini au début par le physicien *Archimède*.

Pour avoir la relation donnant le point centre d'inertie d'un système quelconque, étudions l'équilibre du système présenté dans la figure suivante :



Pour que le système soit en équilibre il faut que la somme des moments des forces par rapport à O soit nulle : $\sum \overrightarrow{M^{0}_{\overline{F_i}}} = \vec{0}$ $\qquad\Rightarrow\qquad$ $\overrightarrow{M^{0}_{\overline{F_A}}} + \overrightarrow{M^{O}_{\overline{F_B}}} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_B} = \vec{0}$$

> ***<u>Rq</u>***: Voir Chapitre I, page 15, pour la définition du moment d'une force (un vecteur) par rapport à un point.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} \wedge m_1 \vec{g} + \overrightarrow{OB} \wedge m_2 \vec{g} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad m_1 \overrightarrow{OA} \wedge \vec{g} + m_2 \overrightarrow{OB} \wedge \vec{g} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \left(m_1 \overrightarrow{OA} + m_2 \overrightarrow{OB}\right) \wedge \vec{g} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad m_1 \overrightarrow{OA} + m_2 \overrightarrow{OB} = \vec{0}$$

Les mathématiciens ont généralisé cette égalité pour un système quelconque représenté par la figure ci-dessous

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} + \ldots\ldots\ldots m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

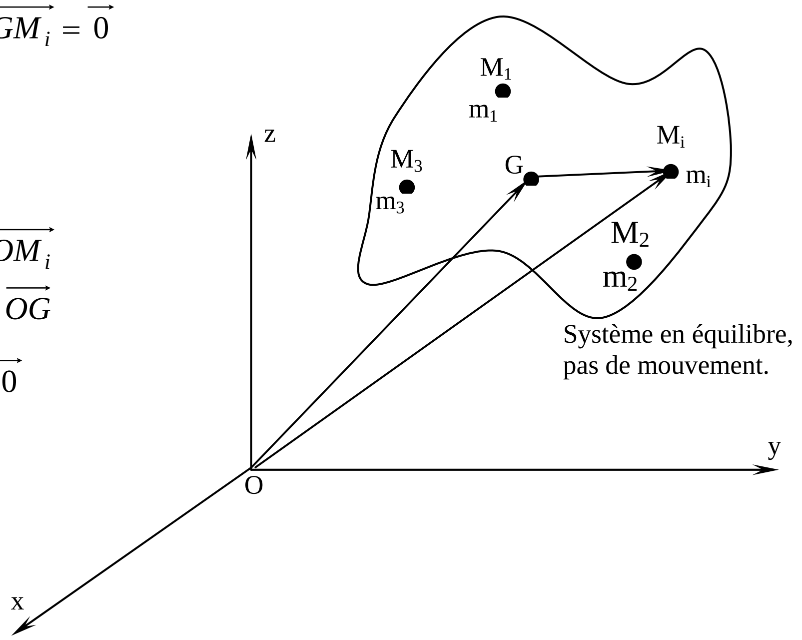
$$\Rightarrow \qquad \sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

D'autre part,

$$\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{OM_i}$$

$$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OG}$$

Donc $\qquad \sum_i m_i \left(\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OG}\right) = \vec{0}$



$$\Rightarrow \sum_i m_i \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{M}$$

M: représente la masse totale du système en équilibre.

Cette dernière relation donne le centre d'inertie d'un système constitué de masses m_i situées aux points M_i. Si le système forme un milieu continu, la somme devient intégrale, et par conséquent, la relation précédente deviendra :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \iiint_M \overrightarrow{OM}\ dM$$

L'intégrale est triple parce que la masse est répartie en volume, trois dimensions.

V. Vecteur quantité de mouvement

Le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel de masse *m* et se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ est défini par le vecteur $\vec{P}$ donné par :

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

La quantité de mouvement est une grandeur vectorielle qui a la même direction que la vitesse.

Le principe d'inertie peut s'énoncer alors de la façon suivante :

✦ Une particule libre, se déplace avec une quantité de mouvement constante dans un repère galiléen.

Ou encore

✦ La quantité de mouvement totale d'un système, se conserve si le principe d'inertie est vérifié.

VI. Notion de Force : *2^{ième} loi de Newton*

Toute cause capable de modifier, dans un référentiel galiléen, le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel est appelée ***FORCE***.

Différentes types de forces existent :

- Forces d'interaction à distance (Forces de gravitation) ;
- Forces électromagnétiques ;
- Forces nucléaires ;
- Forces de contact (Forces de frottement) ;

- etc….

On peut très bien définir une force moyenne, telle que,

$$\overrightarrow{F_{moy}} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{\vec{P}(t') - \vec{P}(t)}{t' - t}$$

Ou encore, force instantanée, telle que,

$$\vec{F}(t) = \lim_{t' \to t} \overrightarrow{F_{moy}} = \frac{d\vec{P}(t)}{dt}$$

✓*<u>Loi Fondamentale de la dynamique</u> ou Principe Fondamental de la Dynamique* ***(PFD)***

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement du centre d'inertie de ce système

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{\gamma}$$

✓*<u>Théorème du centre d'inertie</u>*

Le mouvement de translation d'un système se ramène à celui de son centre d'inertie *G* auquel on applique toutes les forces.

✓*<u>Théorème du moment cinétique</u>*

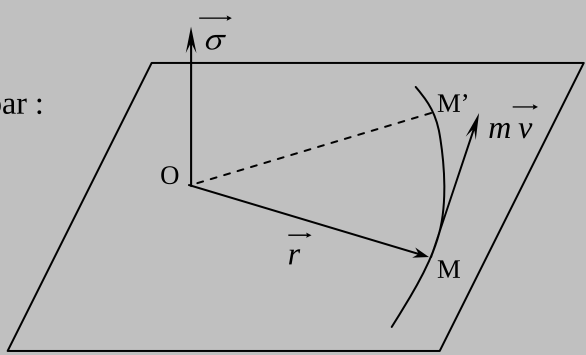
Le moment cinétique du point *M* se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ et ayant une masse *m* par rapport à *O* est défini par : $\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$

Sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \underbrace{\vec{v} \wedge m\vec{v}}_{0} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{M^{t}_{0\vec{F}}}$$



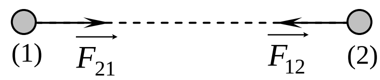
<u>Remarque</u> : pour l'étude des systèmes dynamiques, on utilise généralement ces deux théorèmes et le principe fondamental de la dynamique noté PFD.

VII. **Principe de l'action et de la réaction** : *3ième loi de Newton*

Le principe de l'action et de la réaction, ou principe des réactions réciproques, a été énoncé par *Newton* (*3ième loi de Newton*).

Soient deux points matériels (1) et (2) interagissant entre eux ; l'action exercée par (1) sur (2) $\overrightarrow{F_{12}}$ est égale et opposée à celle exercée par (2) sur (1) $\overrightarrow{F_{21}}$, soit

$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}$ $\left(\left|\overrightarrow{F_{12}}\right| = \left|\overrightarrow{F_{21}}\right|\right)$



C'est deux actions (forces) s'exercent simultanément et sont de même nature.

<u>Exemple de forces</u>

1. *<u>Forces d'interaction à distances</u>*

a. *<u>Forces de gravitation newtonienne</u>*

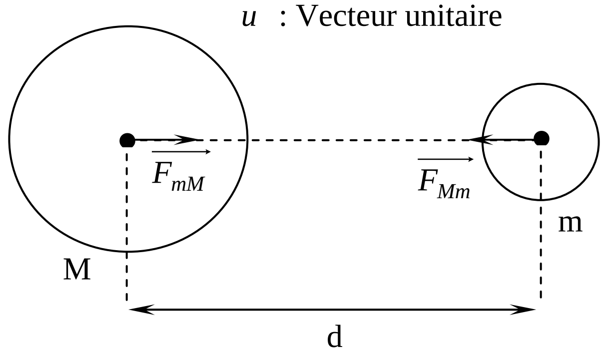
On appelle force de gravitation ou force d'interaction gravitationnelle, la force exercée par une masse *M* sur une autre masse *m*. Cette force d'interaction suit une loi énoncée par *Newton* en 1650.

$$\overrightarrow{F_{M-m}} = -G\frac{mM}{d^2}\vec{u}$$

$\vec{u}$: Vecteur unitaire

G : une constante

G=6,67 10^{11} $m^3Kg^{-1}s^{-2}$

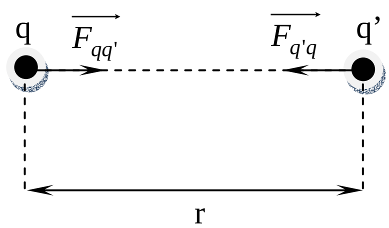


b. *<u>Interaction coulombienne</u>*

L'interaction coulombienne est l'analogue de l'interaction gravitationnelle pour les charges électriques.

$$\left|\overrightarrow{F_{qq'}}\right| = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,q'}{r^2} = K\frac{q\,q'}{r^2}$$

avec $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\ 10^9\ \ mc^2Kg\,s^{-2}$



Notion de Champ

✓*Champ de pesanteur*

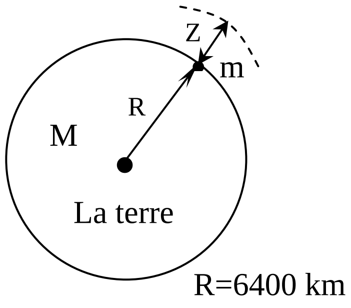
Soit le cas d'un objet sur la surface de la terre

$$\overrightarrow{F_{M-m}} = -G\frac{mM}{R^2}\vec{u}$$

M : masse de la terre ;

m : masse de l'objet ;

R : rayon de la terre.



On pose $\vec{g} = -G\frac{M}{R^2}\vec{u}$: champ de pesanteur

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{F_{M-m}} = m\vec{g}$ force du poids de l'objet en question

Si le corps se trouve à une hauteur z par rapport à la surface de la terre, alors,

$$\overrightarrow{F_{M-m}} = -G\frac{mM}{(R+z)^2}\vec{u}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\vec{g}\right| = G\frac{M}{(R+z)^2} = \frac{GM}{R^2}\cdot\frac{R^2}{(R+z)^2}$$

$\Rightarrow \quad g = g_0\frac{R^2}{(R+z)^2}$ avec g_0 : champ à la surface de la terre

aussi, on peut écrire que : $g = g_0(1+\frac{z}{R})^{-2}$

pour z<<R, et en utilisant un développement limité du premier ordre :

$$g \cong g_0(1-2\frac{z}{R})$$

$$\Rightarrow \quad \Delta g = g - g_0 = \frac{2z}{R}g_0$$

Donc la variation relative est $\frac{\Delta g}{g_0} = \frac{2z}{R}$

Pour z <32 Km, on a $\frac{\Delta g}{g_0} < 1\%$

Donc, on considère le champ de pesanteur comme localement uniforme.

✓*Champ électrique*

Par analogie avec le champ de la pesanteur, on définit le champ électrique, tel que :

$$\overrightarrow{F_{qq'}} = q\vec{E}$$

avec $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2}\vec{u}$$

c. *Interaction électromagnétique*

La force que subit une charge électrique placée dans des champs $\vec{E}$ (électrique) et $\vec{B}$ (magnétique) est appelée forces électromagnétique ou force de Lorentz:

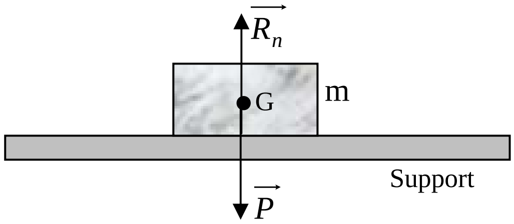
$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

2. *Forces de contact*

a. Réaction du support

La force que subit un objet, posé sur un support horizontal, en provenance du support s'appelle réaction du support.

La réaction du support sur l'objet m est répartie sur toute la surface de contact support-objet $\vec{R_n}$, représente la résultante de toutes les actions exercées sur la surface de contact.



L'objet étant en équilibre $\vec{P} + \vec{R_n} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = -\vec{R_n}$

b. Forces de frottement

Les forces de frottement sont des forces qui apparaissent soit lors du mouvement d'un objet soit cet objet est soumis à une force qui tend à vouloir le déplacer.

Le frottement s'oppose au déplacement des objets en mouvement. Il y a deux types de frottement :

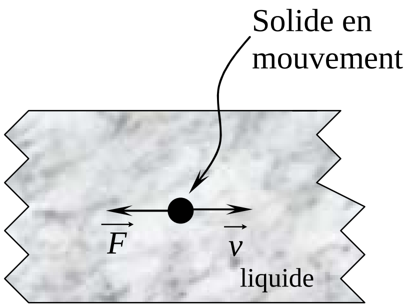
- frottement visqueux (contact solide-fluide)
- frottement solide (contact solide-solide)

✓ *Frottement visqueux*

Dans ce type de frottement la force est proportionnelle à la vitesse,

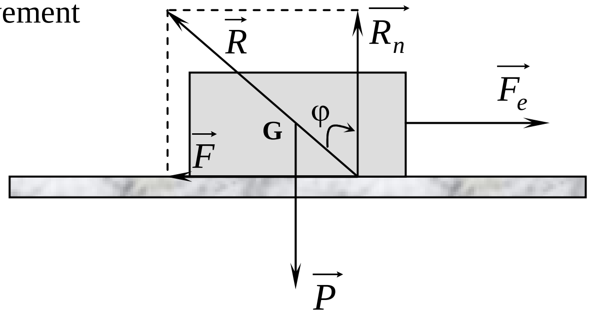
$\vec{F} = -k\,\vec{v}$ $\qquad \vec{F}$: force de frottement

k: constante positive.



✓ *Frottement solide*

Dans cette figure, le bloc solide est en mouvement sous l'action de la force d'entraînement $\overrightarrow{F_e}$.



- $\overrightarrow{F_e}$: Force d'entraînement ;
- $\overrightarrow{R_n}$: Force de réaction ;
- $\overrightarrow{F}$: Force de frottement ;
- φ : angle de frottement.

$F = \mu R_n$ en module.
avec : μ coefficient de frottement ou coefficient de friction : c'est une constante qui dépend de la nature de la surface de contact.

On a : $\dfrac{F}{R_n} = tg\varphi = \mu$

Quelques valeurs de μ $\rightarrow$

Matériaux	μ
Acier-Acier	0.2
Chêne-Sapin	0.67
Caoutchouc-bitume	0.6

$\overrightarrow{F}$ est maximale quant sous l'action de $\overrightarrow{F_e}$ le corps solide est toujours en équilibre (pas de mouvement). A partir de cette valeur, si $\overrightarrow{F_e}$ augmente, le corps solide bouge de sa position d'équilibre.

Condition d'équilibre : $R_n = P$ *et* $F_e = F$

$$\Rightarrow \frac{F}{R_n} = tg\varphi = \frac{F_e}{P}$$

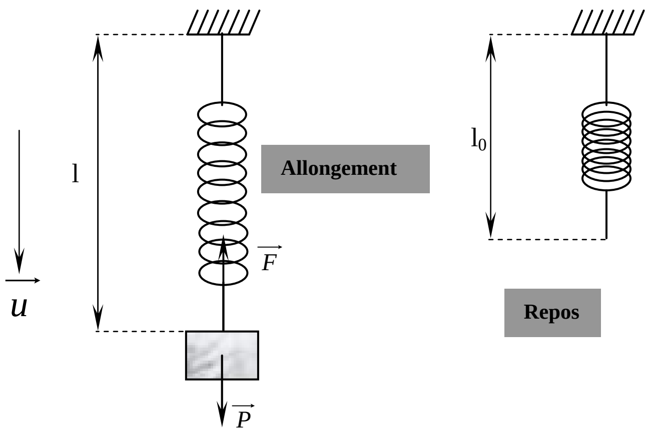
c. *Forces de tension*

Force de tension ou force de rappel. L'exemple le plus simple est la force de rappel du ressort.

$\overrightarrow{F} = -k\,(l - l_0)\,\overrightarrow{u}$

k : coefficient d'allongement

(coefficient de raideur du ressort)



VIII. Applications

Exercice 01

Soit le pendule simple de la figure 01. La masse « m » est assimilée à un point matériel.

1. Déterminer l'équation du mouvement de ce pendule pour les faibles oscillations. On travaillera pour la détermination de l'équation du mouvement dans une base polaire liée à la masse *m* et on utilisera le P. F. D.
2. Déterminer la même équation du mouvement, toujours pour les faibles oscillations, en utilisant cette fois le théorème du Moment Cinétique.

Exercice 02

Un traîneau de masse m=200Kg est tiré suivant une ligne de plus grande pente d'un plan incliné par l'intermédiaire d'un câble faisant un angle β avec celle-ci (Fig. 02).

1. La tension du câble vaut T=1000 N. Le mouvement étant uniforme de vitesse $v=10\ km.h^{-1}$; déterminer la réaction $\vec{R}$ somme des forces de contact exercées par le sol sur le traîneau.

AN: $\alpha=20°$, $\beta=30°$, $g=10\ ms^{-2}$.

2. On augmente la tension et le mouvement du traîneau devient uniformément accéléré.

a. Le coefficient de frottement traîneau-sol restant identique, la réaction $\vec{R}$ est-elle modifiée?

b. La vitesse du traîneau passe de $10\ Km\ H^{-1}$ à $20\ Km\ H^{-1}$ sur une distance de 10 m. Calculer la puissance exercée par la tension T du câble lorsque la vitesse vaut $15\ Km\ H^{-1}$.

Exercice 03

Trois solides identiques, A, B et C, assimilés à des points matériels de mêmes masses *m*, sont liés comme l'indique la figure 03.

Nous négligeons la masse des fils et nous admettons que leur tension est la même de part et d'autre des poulies.

Déterminer la tension de chacun des fils en supposant qu'il n'y ait pas de frottements

Fig. 01

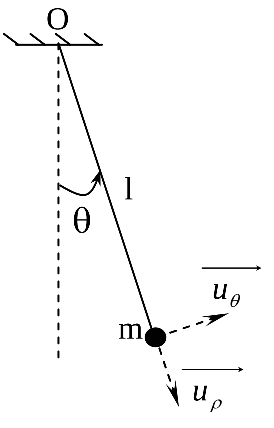


Fig. 02

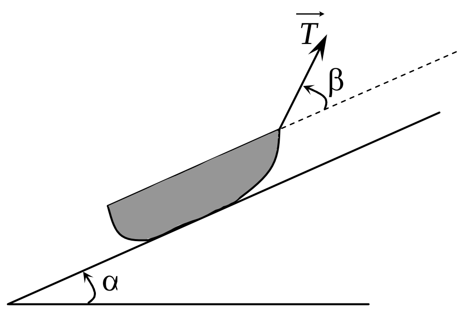


Fig. 3