Intégrale double

B. Seddoug. CPGE, Oujda

.1 Définition - Exemples

Définition 1 Soit $D = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle $\mathbb{R}^2$ et f une fonction continue sur D, à valeurs réelles. On définit

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

On admettra le théorème de **Fubini** qui énonce que le rôle des deux variables est symétrique, c'est-à dire que l'on peut aussi écrire:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Exemple 1 $D = [0,2] \times [0,1]$, $f(x,y) = x^2 + y$:

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy &= \int_0^2 \left(\int_0^1 (x^2+y)dy \right) dx \\
&= \int_0^2 \left(\left[x^2 y + \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{y=1} \right) dx \\
&= \int_0^2 \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{11}{3}.
\end{aligned}$$

On étend aussi cette définition au cas où le domaine d'intégration D est de la forme:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

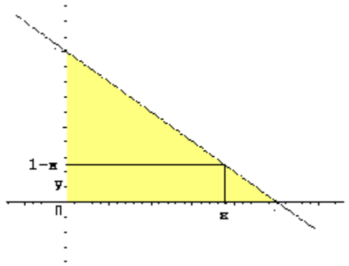
En posant:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

La méthode générale de calcul de $\iint_D f(x,y)dxdy$ consiste donc à intégrer d'abord par rapport à une variable, y par exemple, les bornes dépendant de x puis à intégrer par rapport à l'autre variable.

On admettra que, pour les fonctions continues, on peut intervertir l'ordre d'intégration. Un énoncé rigoureux de cette propriété (*théorème de Fubini*) et a fortiori sa démonstration, nécessite une définition générale précise de la forme des domaines sur lesquels on intègre, définition qui dépasse le cadre de ce cours. (L'intervertion peut être fausse pour certaines fonctions sur certains domaines).

Exemple 2 $\iint_D x^2 y dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 1\}$.
Le domaine D peut aussi s'exprimer sous la forme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1-y\}$.



Donc $\iint_D x^2 y dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x^2 y dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{60}$.

On vérifie également que $\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} x^2 y dx \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{3}(1-y)^3 y dy = \frac{1}{60}$.

Exemple 3 Aire d'une ellipse:
On calcule $\iint_D dxdy$, en général pour calculer l'aire de D. Dans le cas de l'ellipse

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

$\iint_D dxdy = 4 \int_0^a \left(\int_0^{\psi(x)} dy \right) dx$, où $\psi(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. On trouve $aire(D) = \pi ab$.

Remarque 1 Dans le cas où $f(x,y) = g(x)h(y)$, il est évident que

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} g(x)h(y)dxdy = \int_a^b g(x)dx . \int_c^d h(y)dy.$$

.2 Propriétés

P .1 (Linéarité par rapport au domaine) Si D et D' sont disjoints on a:

$$\iint_{D \cup D'} f(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_{D'} f(x,y)dxdy$$

P .2 (Linéarité) Pour f, g continues sur D et λ réel on a:

$$\iint_D (f + \lambda g)\, dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \lambda \iint_D g(x,y)dxdy.$$

P .3 (monotonie) Pour f, g continues sur D on a:

$$f \leq g \Longrightarrow \iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy.$$

En particulier si $f \geq 0$: $\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0$.

.3 Changement de variables

Les formules sont données sans démonstrations.

.3.1 Cas affine:

$$\begin{cases} x = au + bv + c \\ y = a'u + b'v + c \end{cases}$$

Dans ce cas on a

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(au+bv+c, a'u+b'v+c)\left|ab'-a'b\right| dudv$$

Où $\Delta = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in D\right\}$.

Exemple 4 Aire d'un parallélogramme: Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$. Avec le changement de variable

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}u - \dfrac{\sqrt{2}}{2}v \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}u + \dfrac{\sqrt{2}}{2}v \end{cases}$$

On a $\Delta = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in D\right\} = \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \times \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Donc

$$\iint_D dxdy = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} du \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dv = \sqrt{2}.\sqrt{2} = 2.$$

.3.2 Coordonnées polaires:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Dans ce cas on a:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta.$$

Où $\Delta = \{(r,\theta) : (r\cos\theta, r\sin\theta) \in D\}$.

Exemple 5 Aire d'un disque $D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$:

$$\iint_D dxdy = \iint_\Delta r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^R r dr = 2\pi . \frac{1}{2}R^2 = \pi . R^2.$$