

Examen Maths II

Exercice 1. On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} + \cos^2 x - \sin^2 x \dots (1)$$

- 1) Résoudre l'équation homogène associée à (1)
- 2) Donner la solution particulière de l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} \dots (2)$$

- 3) Donner la solution particulière de l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = \cos 2x \dots (3)$$

- 4) Donner la solution particulière de (1).
- 5) Donner la solution générale de (1).

Exercice 2. Soient A et B deux matrices d'ordre (3, 4) et (4, 3) respectivement définies par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Donner la matrice $D = A.B$, puis donner D^{-1} .
- 2) On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} \alpha + 2 & 1 & -1 \\ 12 & 2\alpha + 2 & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{pmatrix}$,
 - 2.1) Calculer le déterminant de C.
 - 2.2) Soit $P(\alpha) = \alpha^3 + 4\alpha^2 - 4\alpha - 16$. Calculer $P(2)$.
 - 2.3) Pour quelles valeurs de α , C est inversible.
- 3.3) On considère le système d'équations linéaires

$$(S) : \begin{pmatrix} \alpha + 2 & 1 & -1 \\ 12 & 2\alpha + 2 & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Résoudre le système (S) suivant les valeurs de α .

Exercice 3. Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x(1-x^2)}$, $x \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$

- 1) Calculer $\int f(x) dx$.
- 2) Résoudre l'équation différentielle

$$y' - y = -\frac{e^x}{x(x^2 - 1)}$$

Corrigé de l'Examen de Maths 2

Exon n°1: (6 points)

$$y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} + \cos^2 x - \sin^2 x \quad (1)$$
$$= xe^{2x} + \cos 2x.$$

1) Résolution de l'équation homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$

L'éq caractéristique: $r^2 - 3r + 2 = 0$

$$\Delta = 1 > 0 \Rightarrow r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 2$$

Donc $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ est la sol

générale de l'éq homogène (1)

2) solution particulière de l'éq: $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$ (2)

le second membre est xe^{2x} avec 2 racine de l'équation caractéristique alors,

$$y_p = (ax^2 + bx + c)e^{2x} \Rightarrow y'_p = (2ax^2 + 2(a+b)x + b+c)e^{2x}$$

$$\text{et } y''_p = (4ax^2 + (8a+4b)x + (2a+4b+4c))e^{2x} \quad (2)$$

En remplaçant, y_p , y'_p et y''_p dans (2) on trouve

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pour $c=0$ $y_p = (\frac{1}{2}x^2 - x)e^{2x}$ est une sol particulière

3) solution particulière $y'' - 3y' + 2y = \cos 2x$

$2i$ n'est pas racine de l'équ caractéristique

Donc $y_p = A \cos 2x + B \sin 2x$ A, B est.

$$y'_p = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$$

$$y''_p = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$$

On remplace dans l'équation (3) et on trouve

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 6A \sin 2x - 6B \cos 2x + 2A \cos 2x + 2B \sin 2x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow (-2A - 6B) \cos 2x + (-2B + 6A) \sin 2x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A - 6B = 1 & \Rightarrow -2A = 6B + 1 \end{cases}$$

et

$$-2B + 6A = 0 \Rightarrow -2B + 3(6B + 1) = 0$$

$$\Rightarrow -20B = 3 \Rightarrow \boxed{B = -\frac{3}{20}}$$

$$-2A = 6B + 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}(6B + 1) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{18}{20} + 1\right)$$

$$A = \frac{9}{20} - \frac{1}{2} = \frac{9-10}{20} = -\frac{1}{20} \quad \boxed{A = -\frac{1}{20}}$$

Donc $\boxed{y_p = -\frac{1}{20} \cos 2x - \frac{3}{20} \sin 2x}$ est une sol

particulière de (3)

f) Donc la solution particulière de (1) est

$$\boxed{y_p(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) e^{2x} - \frac{1}{20} \cos 2x - \frac{3}{20} \sin 2x} \quad (0,5)$$

5) La solution generale de (1) est:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^{2x} - \frac{1}{20} \cos 2x - \frac{3}{20} \sin 2x$$

Exon^o 2 (9,5 points)

(0,5)

$$)z A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & -4 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

Calcul de D^{-1}

$$\det D = -6 \begin{vmatrix} 5 & \frac{3}{2} \\ -4 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -\frac{5}{2} & -4 \end{vmatrix} = \frac{39}{4} \quad (0,5)$$

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} {}^t C_D$$

$$C_D = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & \frac{3}{2} \\ -4 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 7 & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -\frac{5}{2} & -4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -\frac{5}{2} & -4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 7 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & \frac{55}{4} & -\frac{31}{2} \\ -\frac{13}{2} & \frac{35}{2} & -\frac{43}{2} \\ -\frac{13}{2} & 16 & -23 \end{pmatrix}$$

alors ${}^t C_D = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & -\frac{13}{2} & -\frac{13}{2} \\ \frac{55}{4} & \frac{35}{2} & 16 \\ -\frac{31}{2} & -\frac{43}{2} & -23 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{55}{39} & \frac{70}{39} & \frac{64}{39} \\ -\frac{62}{39} & -\frac{89}{39} & -\frac{92}{39} \end{pmatrix}$ (1)

2) $C = \begin{pmatrix} \alpha+2 & 1 & -1 \\ 12 & 2\alpha+2 & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{pmatrix}$

1) $\det C = (\alpha+2) \begin{vmatrix} 2\alpha+2 & 2 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 & 2\alpha+2 \\ \alpha & 2 \end{vmatrix}$
 $= 2(\alpha^3 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 16)$ (1 pt)

2.2) $p(\alpha) = \alpha^3 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 16$; $p(2) = 0$

2.3) les valeurs de α pour que C soit inversible

C est inversible $\Leftrightarrow \det C \neq 0$

$\det C = 0 \Leftrightarrow p(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)(\alpha^2 + 6\alpha + 8) = 0$

Par identification ou division Euclidienne on trouve

$p(\alpha) = (\alpha-2)(\alpha^2 + 6\alpha + 8) = (\alpha-2)(\alpha+2)(\alpha+4)$ (1,25)

Donc $p(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$ ou $\alpha = -2$ ou $\alpha = -4$

Par conséquent, C est inversible si $\alpha \in \mathbb{R} - \{2, -4, -2\}$

2.4 Résolution du système (S): $CX = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1^{er} cas si $\det C \neq 0$ alors le système est de Cramer

$$x = \frac{\Delta_1}{\det C} ; \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2\alpha+2 & 2 \\ 0 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = 2\alpha^2 + 3\alpha - 2$$

$$x = \frac{2\alpha^2 + 3\alpha - 2}{2(\alpha-2)(\alpha+2)(\alpha+4)}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\det C} ; \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 & -1 \\ 12 & -1 & 2 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha^2 - 13\alpha$$

$$y = \frac{-\alpha^2 - 13\alpha}{2(\alpha-2)(\alpha+2)(\alpha+4)}$$

(2 pts)

$$z = \frac{\Delta_3}{\det C} ; \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 & 1 \\ 12 & 2\alpha+2 & -1 \\ \alpha & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\alpha^2 - \alpha + 28$$

$$z = \frac{-2\alpha^2 - \alpha + 28}{2(\alpha-2)(\alpha+2)(\alpha+4)}$$

2^{eme} cas: si $\alpha = 2$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 12 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det C = 0 \Rightarrow \text{Rg } S \leq 2$

soit $M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det M_1 = 12 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg } S = 2$

le déterminant caractéristique $D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 12 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ le système (S) n'admet pas de solutions.

• si $\alpha = -2$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 12 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 12 & -2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$
 $\Rightarrow \text{Rg } S = 2$ (1)

$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 12 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 22 \neq 0 \Rightarrow$ (S) n'admet pas de solution.

• si $\alpha = -4$ $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 12 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$
 $\Rightarrow \text{Rg } S = 2$ (1)

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \Rightarrow$ (S) n'admet pas de solution.

Exo n°3 (5 points)

$f(x) = \frac{1}{x(1-x^2)}$ $x \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$

1) $\int f(x) dx$

$\frac{1}{x(1-x^2)} = \frac{1}{x(1-x)(1+x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x}$

$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)(1+x)} = a + x \left(\frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x} \right)$ au pt $x=0$
 on trouve $\boxed{a=1}$

$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{(1+x)}{x} + \frac{b(1+x)}{1-x} + c$ au pt $x=-1 \Rightarrow \boxed{b=-\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1-x}{x} + b + \frac{c(1-x)}{1+x}$ au pt $x=1 \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } \int f(x) dx &= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{1}{2(1-x)} dx - \int \frac{1}{2(1+x)} dx \\
 &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1-x| - \frac{1}{2} \ln|1+x| + C; C \in \mathbb{R} \\
 &= \ln \left(\frac{|x|}{\sqrt{|1-x^2|}} \right) + C \quad (2 \text{ pts})
 \end{aligned}$$

2) Résolution de $y' - y = -\frac{e^x}{x(x^2-1)}$ (I)

$$y' - y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \ln|y| = x + C$$

$$\Rightarrow \boxed{y = k e^x, k \text{ cste}} \quad (1 \text{ pt})$$

M.V.C

$$y_p = k(x) e^x \Rightarrow y_p' = k'(x) e^x + k(x) e^x$$

En remplaçant ds (I), on trouve $k'(x) = \frac{1}{x(1-x^2)}$ (1 pt)

$$\Rightarrow k(x) = \int \frac{dx}{x(1-x^2)} = \ln \left(\frac{|x|}{\sqrt{|1-x^2|}} \right) + C \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow y_p = e^x \ln \left(\frac{|x|}{\sqrt{|1-x^2|}} \right) \quad (0,5)$$

Finalement la solution générale de (I) est

$$\boxed{y = k e^x + e^x \ln \left(\frac{|x|}{\sqrt{|1-x^2|}} \right)} \quad (0,5)$$