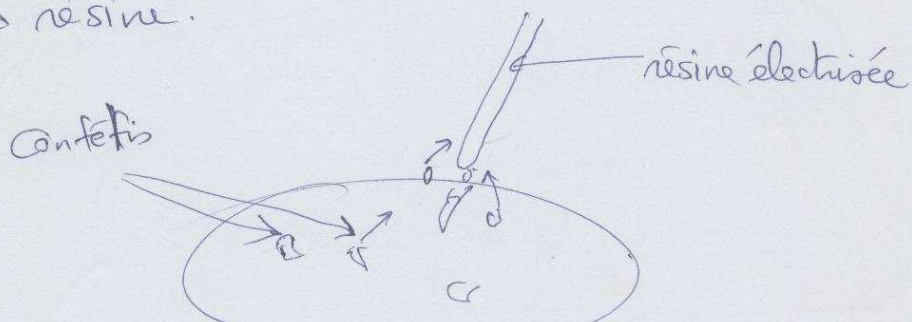
24/09/2006 ①

Partie I : Electrostatique

Dans cette 1ère partie, on s'intéresse aux phénomènes électriques dus ~~dus~~ à des charges immobiles (statiques) dans un système de référence bien choisi.

1. Phénomène d'électrisation

Si nous prenions un bâton de résine (ambre jaune = elektron en grec) et frottons le avec un morceau de laine ; le baton acquiert la propriété d'attirer les corps légers comme les confétis de papier. On dit que le bâton ~~de~~ s'est électrisé, il y a électrisation de la résine.

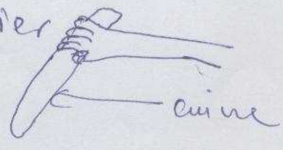


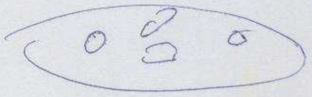
Il ∃ ~~deux~~ trois types d'électrisation
- élect. par frottement
- élect. par contact
- élect par influence

• Electrisation par frottement

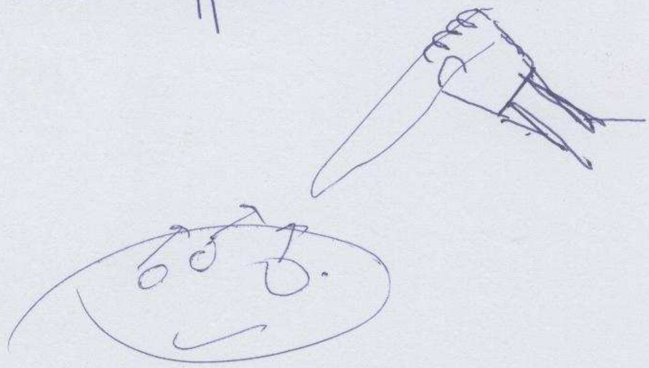
si nous prenions un bâton de cuivre

Répétons l'expérience avec un bâton de cuivre tenu à la main, nous n'observons plus aucune action sur les confétis de papier





Si nous prenons maintenant la précaution de ② tenir le bâton de cuivre avec des gants (isolants), l'électrisation apparait de nouveau.



<u>Expliquation</u>

D'une façon générale, tous les corps peuvent s'électriser par frottement, mais il faut les classer en deux groupes :

- ceux qui se comportent comme la résine dont la charge électrique reste localisée sur la partie du corps frotté. Ce groupe contient tous les corps que nous appelons les isolants ; résine, verre, ébonite, soufre...
- ceux qui se comportent comme le cuivre dont la charge électrique se déplace le long du corps frotté. Dans ce cas cette charge à circulé le long du bâton de cuivre, a traversé le corps de l'expérimentateur et est retournée à la terre.

L'électrisation n'apparaît que s'ils sont tenus par un manche isolant ; ce groupe contient tous les corps que nous appelons les conducteurs : métaux, graphite ....

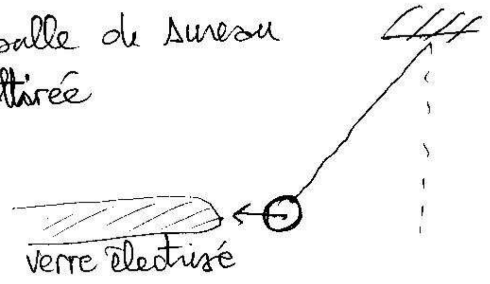
• Electrisation par contact

01/10/2006

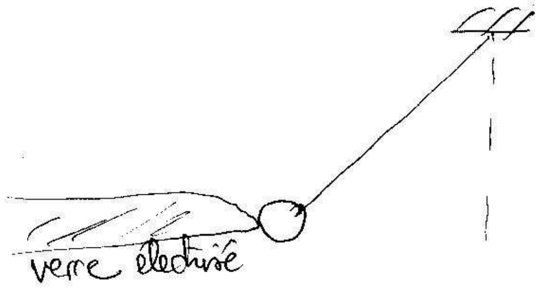
البيلسان

Nous suspendons une petite balle de sureau à un fil de soie. Approchons un bâton de verre électisé de la balle de sureau et observons :

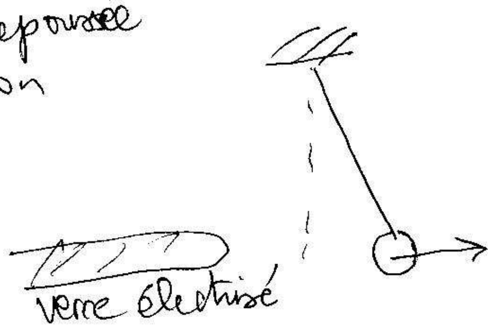
- La balle de sureau est attirée



- Elle vient en contact avec le bâton de verre,

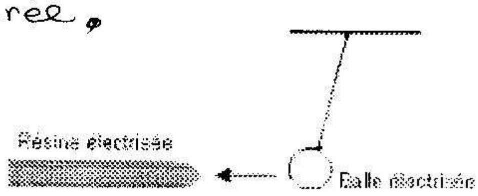


- Elle est ensuite repoussée par ce même bâton



Approchons maintenant un bâton de résine électisé :

- La balle est attirée.



Expliquation

La balle de sureau était à l'état neutre au départ de l'expérience. Elle s'est électrisée au contact du bâton de verre et à acquit une charge électrique. Il y a électrisation par contact.

Le bâton de verre et la balle étant maintenant de même charge électrique, ils se repoussent. On dit qu'ils sont de même signe.

A l'approche du bâton de résine la balle de sureau est attirée parcequ'elle est de charge électrique différente du bâton de résine. On dit qu'ils sont de signes contraires.

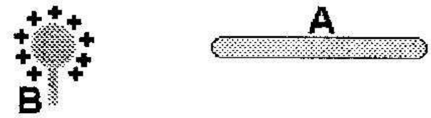
Conclusion

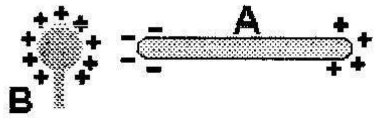
Il y a deux espèces d'électricité :

- l'une semblable à celle produite sur le verre est appelée positive (+).
- l'autre semblable à celle produite sur la résine est appelée négative (-).
- Les charges de même signes se repoussent.
- Les charges de signes contraires s'attirent.

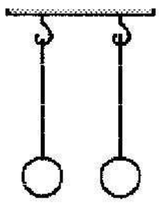
- **Électrisation par influence**

Lorsqu'on approche d'un corps A électriquement neutre un corps B électrisé il se produit sur le corps A une électrisation telle que des charges de signes opposés s'accumulent en regard du corps B. Comme le corps A ne reçoit ni ne cède aucune charge, des charges de signes opposés se répartissent à la surface du corps A avec une prédilection pour les surfaces courbes ou pointues des extrémités.



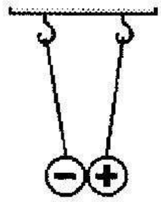


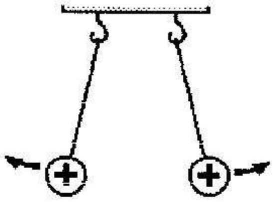
Attraction et répulsion



deux corps neutres ne s'attirent ni de se repoussent

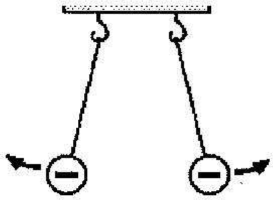
deux corps de charges contraires s'attirent





deux corps de charges positives se repoussent

deux corps de charges négatives se repoussent



2. La charge électique

Un Corps électisé se caractérise du corps non électisé par une propriété supplémentaire qui est l'électisation.

Il y deux sortes de charges électiques : les charges positives et les charges négatives.

- Deux corps portant des charges de même signe se repoussent
- Deux corps portant des charges de signe contraires s'attirent.

Tout corps contient à la fois des charges ⊕ et des charges ⊖.

- Les charges ⊖ sont portées par des particules très petits et identiques appelles : électrons
- les charges ⊕ ——————//—————— ——————//—————— : protons

Dans un corps neutre les charges ⊕ et les charges ⊖ se compensent. La charge totale est nulle.

- L'unité de charge électique est le Coulomb (C)
- un électron a une charge négative $e^- = -1.6 \times 10^{-19}$ C

Il faut donc 6.24×10^{18} électrons pour obtenir un Coulomb (1C)

- 1 Ampère-heure (Ah) = 3600 C

3. Force électrique (Force de COULOMB)

Nous savons que si nous avons deux corps A et B de masses m_A et m_B respectivement, alors le corps A attire B par une force $\vec{F}_{AB}$ et B attire A par une force $\vec{F}_{BA}$, tel que :

$$\|\vec{F}_{AB}\| = \|\vec{F}_{BA}\| = G\,\frac{m_A\, m_B}{r^2}$$: Force de l'attraction universelle

avec $G = 6.6 \times 10^{-11}$ SI et $r = \|\vec{AB}\|$.

Mais, si ces deux corps sont chargés par des charges q_A et q_B respectivement, il a été observé expérimentalement l'existence d'une force supplémentaire qui peut être une force d'attraction ou répulsion dûe à l'intéraction entre les charges électriques q_A et q_B. Cette l'intensité de force est beaucoup plus importante que celui de la force de l'attraction universelle. Elle a pour intensité :

$$\|\vec{F}^{e}_{AB}\| = \|\vec{F}_{BA}\| = K\,\frac{q_A\, q_B}{r^2}$$

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^{9}\ SI,\quad \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^{9}}\ S.I.$$

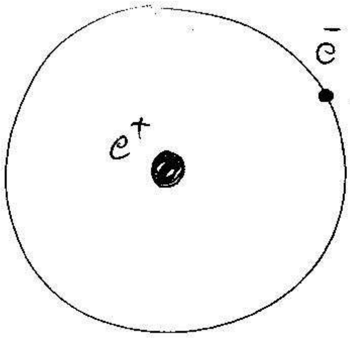
$$[q_A] = [q_B] = \cancel{\text{Newton}}\ \text{coulomb}\ (C)$$

$$[r] = \text{mètre}\ (m).$$

$$[F] = \text{Newton}\ (N)$$

Comparaison entre la force élec et la force de l'attraction universelle,

Prenons le cas de l'atome d'hydrogène.



$$F_e = K\frac{q_{e^+}q_{e^-}}{r}\ ,\quad F_m = G\frac{m_{e^+}m_{e^-}}{r}$$

$q_{e^+} = 1.6\times10^{-19}\ C$ $\quad$ $G = 6.6\times10^{-11}\ SI$

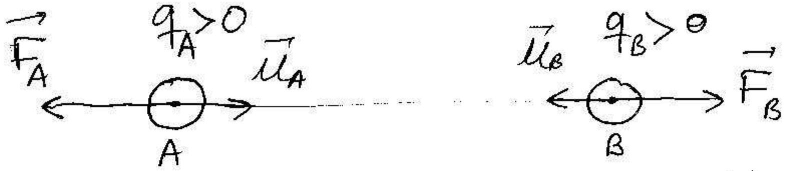
$q_{e^-} = -1.6\times10^{-19}\ C$ $\quad$ $m_{e^-} = 9\times10^{-31}\ Kg$

$r = 0.53\times10^{-10}\ m$ $\quad$ $m_{e^+} = 1831\ m_{e^-}$

On obtient: $F_e \simeq 10^{-7} N \gg F_m \approx 10^{-47} N$

Le vecteur Force :

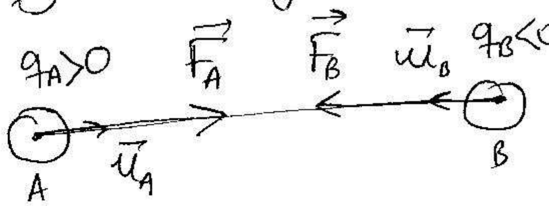
• Deux charges de même signes :



$$\vec{F}_A = K \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{u}_B$$: la force due à la charge q_B et s'exerçant sur la charge q_A placée en A

$$\vec{F}_B = K \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{u}_A$$: la force du à la charge q_A et s'exerçant sur la charge q_B placée en B.

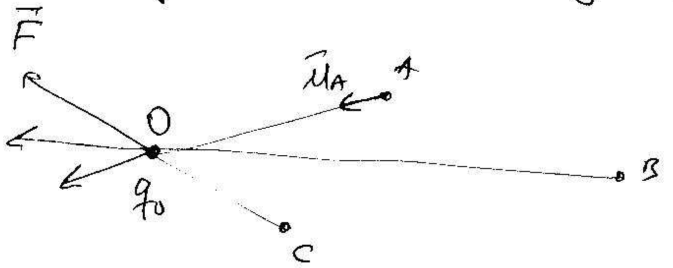
• Deux charges de signe opposés



$$\vec{F}_A = K \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{u}_B$$

$$\vec{F}_B = K \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{u}_A$$

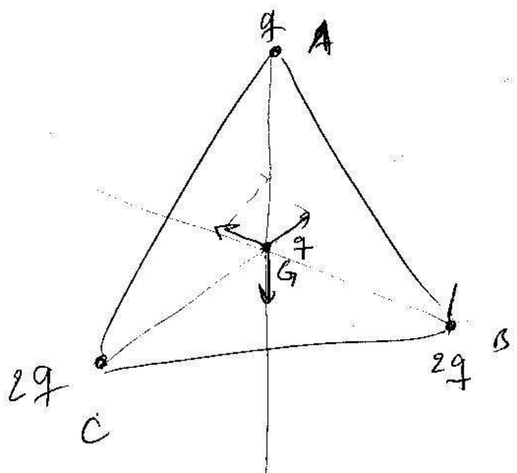
Force dûe à l'ensemble des charges ($q_1, q_2, \dots q_n$) et s'exerçant sur la charge q_0.



$$\vec{F_O} = K \frac{q_0 q_A}{\|\vec{AO}\|^2} \vec{u}_A + \dots\dots$$

$$\vec{F}_0 = K q_0 \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

<u>Exemple</u> : Calculer la force électrique due à $q(A)$, $2q(B)$ et $2q(C)$ et s'exerçant sur la charge q_0 placée au centre de gravité du triangle ABC de côté $2a$.



<u>Validité de la loi de Coulomb</u>: La loi de Coulomb s'applique pour des distances telles $r \geq 10^{-12}$ m. Si $r < 10^{-12}$, elle n'est plus valable, car les charges ne peuvent plus être considérées comme ponctuelle.

4. Champ électrostatique :

On dit que la présence d'une charge q en un pt O modifie les propriétés de l'espace qui l'entoure et on traduit ceci par l'existence d'un champ vectoriel $\vec{E}$ (champ électrostatique).

a) Cas d'une charge ponctuelle

Dans un référentiel R, en tout pt M situé à la distance r d'une charge q, immobile placée en O, il existe un champ électrostatique $\vec{E}$ tel que :

$$\vec{E} = K \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

$\overrightarrow{OM} = \vec{r}$

$\|\overrightarrow{OM}\| = r$

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E} = K \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

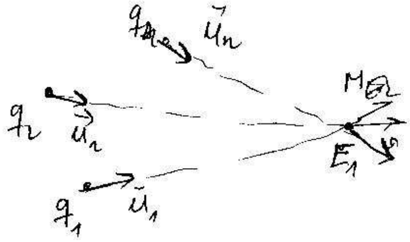
$\vec{u}$: vecteur unitaire a pour origine le pt où se trouve la charge q.

l'unité du champ électros. est $V \cdot m^{-1}$.

b) Cas de plusieurs charges ponctuelles

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{n} K \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i \qquad \vec{r}_i = \overrightarrow{O_iM}$$

~~c) Relation avec la loi de Coulomb~~



c) Relation avec la loi de Coulomb

Si l'on place en M une autre charge q', elle est soumise à une force

$$\vec{F}' = q'\vec{E}$$

$$\vec{F} = K \frac{qq'}{r^3}\vec{r}.$$

Le champ électrostatique est un champ de vecteurs. Il caractérise la déformation électrique du milieu due à la présence charges q_i.

5. Potentiel électrostatique

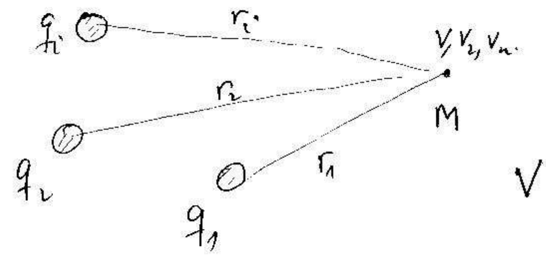
a) Cas d'une charge ponctuelle :

En un pt M situé à la distance r d'une charge q, immobile et placée en O, il existe un potentiel V tel que :

$$V = K\frac{q}{r} + Cte$$

L'unité du potentiel est le volt (V).

b) Cas de plusieurs charges ponctuelles,



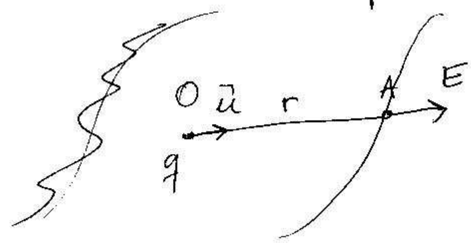
$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} K \frac{q_i}{r_i} + \text{Cte}$$

Généralement, on prend $V(\infty) = 0$.

c) Relation avec le champ $\vec{E}$

Soit une charge ponctuelle q en O. Le champ au pt A ($\vec{OA} = \vec{r}$) est :

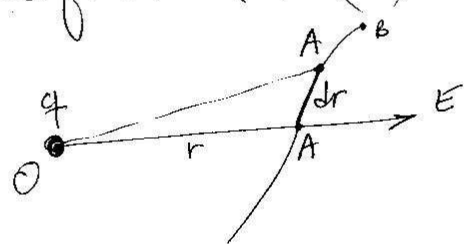


$$\vec{E} = K \frac{q}{r^2} \vec{u} = K \frac{q}{r^3} \vec{r}.$$

Soit A', un pt infiniment voisin de A / $\vec{AA'} = \vec{dr}$

La circulation élémentaire dC de $\vec{E}$ le long du chemin AA' est, par définition : $(\mathcal{C})$

$$dC = \vec{E} \cdot \vec{dr}$$



$$dC = K \cdot \frac{q}{r^3} \cdot \vec{r} \cdot d\vec{r}$$

or $\quad \vec{r}\, d\vec{r} = d\left(\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{r}\right) = \frac{1}{2} d(r^2) = r\,dr$

$$dC = K\frac{q}{r^3} \cdot r\,dr \Rightarrow dC = Kq\frac{1}{r^2}\,dr$$

le long d'un chemin qque de A à B,

$$C_{A\to B} = \int_A^B dC = \int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dr}$$

si $A=B$, le chemin est un contour (fermé courbe) et :

$$C = \oint \vec{E}\,\vec{dr} = 0 .$$

On dit qu'entre A et A' existe une difference de potentiel (DDP) dV tel que :

$$dV = -dC \quad \text{soit} \quad \boxed{dV = -\vec{E}\,\vec{dr}}$$

$$dV = -Kq\frac{1}{r^2}\,dr \Rightarrow V = -Kq\int\frac{1}{r^2}\,dr$$

$$V = -K\frac{q}{r} + \text{Cste}$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \quad (1)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \text{---} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{grad\,V} = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \partial \text{---} \quad (3)$$

$$dV = \overrightarrow{grad\,V} \cdot \vec{dr}.$$

par identification avec :

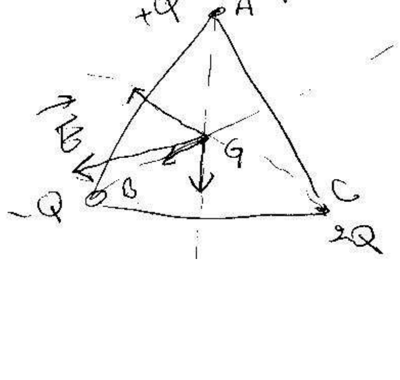
$$dV = -\vec{E}\,\vec{dr}.$$

On obtient :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad\,V}}.$$

<u>Exemple</u> : On place trois charges Q_A, $-Q_B$ et $2Q_C$ aux sommet d'un triangle équilatéral dont la longueur des côtés est a.

Déterminer le champ électrique au centre de gravité de ce triangle.

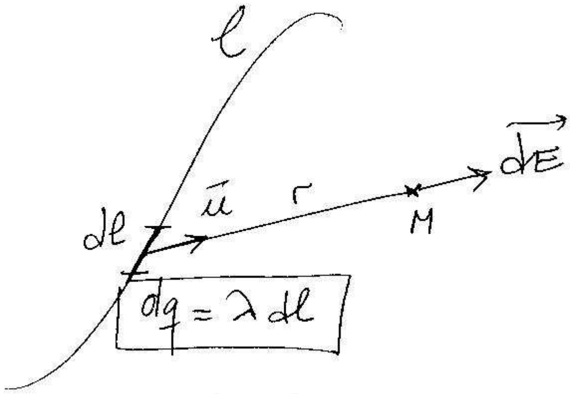


5. Distribution de charges

Dans le cas où les charges ne sont plus ponctuelles c-à-d, qu'elles distribuées sur le corps chargé, on peut dans ce cas considérer trois cas :

a) Distribution linéaire

si les charges sont distribuées linéairement sur un fil par exemple, il faut connaître dans ce cas la densité linéaire (λ) dans chaque pt du fil.



la charge totale sur ℓ est q donc dans $d\ell$ se trouve dq

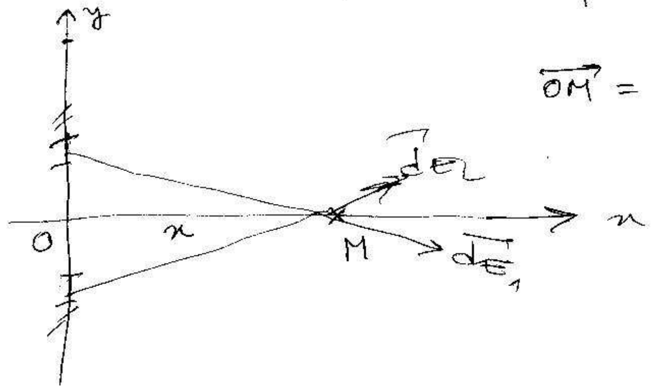
Il en résulte donc un champ électrique élémentaire :

$$\overrightarrow{dE} = K\,\frac{dq}{r^2}\,\vec{u} = \boxed{K\,\frac{\lambda\, d\ell}{r^2}\,\vec{u}}$$

et le champ total est :

$$\vec{E} = \int_{\ell} K\,\frac{\lambda\, d\ell}{r^2}\,\vec{u}\,.$$

__Exemple__ : soit un fil ~~droit~~ de longueur infini chargé par une densité linéaire λ. Calculer au pt M le champ électrique créé par cette distrib.

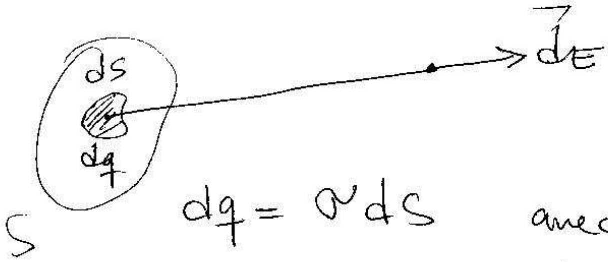


$\vec{OM} = x\vec{i}$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

b) Distribution superficielle

si les charges sont distribuées sur la surface d'un corps. On prend un élément de surface dS du corps chargé.



$dq = \sigma dS$ avec σ est la densité superficielle de charges

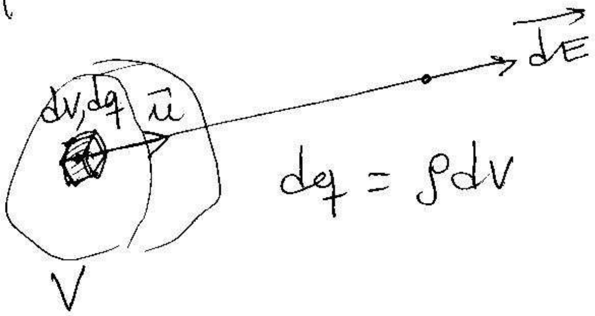
$$\vec{dE} = K \frac{dq}{r^2} \vec{u} = K \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}$$

$$\vec{E} = \iint K \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}$$

$\boxed{\text{Exemple Disque } \sigma, R}$

c) Distribution volumique

si les charges sont distribuées dans un volume, on prend un élément de volume dV du corps chargé



$dq = \rho dV$ avec ρ est la densité volumique de charges

$$\vec{dE} = K \frac{dq}{r^2} \vec{u} = K \frac{\rho dV}{r^2} \vec{u}$$

$$\vec{E} = \iiint K \frac{\rho dV}{r^2} \vec{u}$$

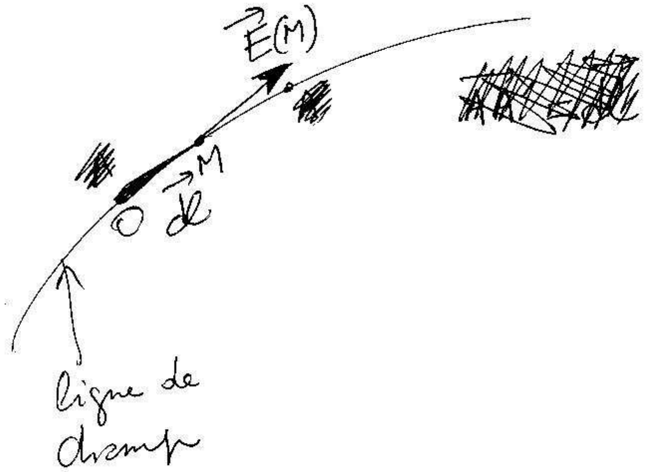
$\boxed{\text{Exemple Sphère } \rho, R}$

6. Lignes de champ et surfaces équipotentielles

a) Lignes de champ : une ligne de champ est une courbe dont la tangente est en tout pt M colinéaire à $\vec{E}(M)$.

L'équation d'une ligne de champ s'obtient en écrivant :

$$\boxed{\vec{E}(M) \wedge d(\vec{OM}) = \vec{0}}$$



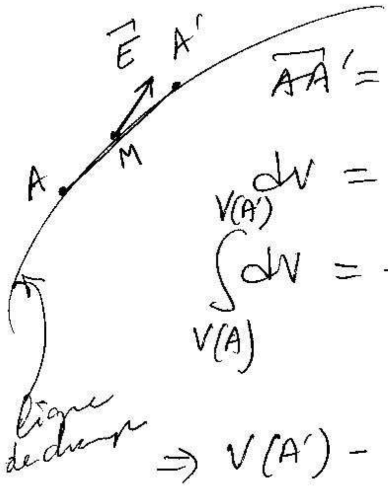
b) Surfaces équipotentielles : Une surface équip. est un lieu des pts M tels que :

$$\boxed{V(M) = \text{Cste}}$$

Les surfaces équip. sont tjs perpendiculaires aux lignes de champ : $dV = \vec{grad}(V) \cdot d\vec{OM}$.

7. Caractéristiques importantes entre $\vec{E}$ et V

- Le potentiel diminue le long d'une ligne de champ.



$$\overrightarrow{AA'} = \vec{dl}$$

$$dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl}$$

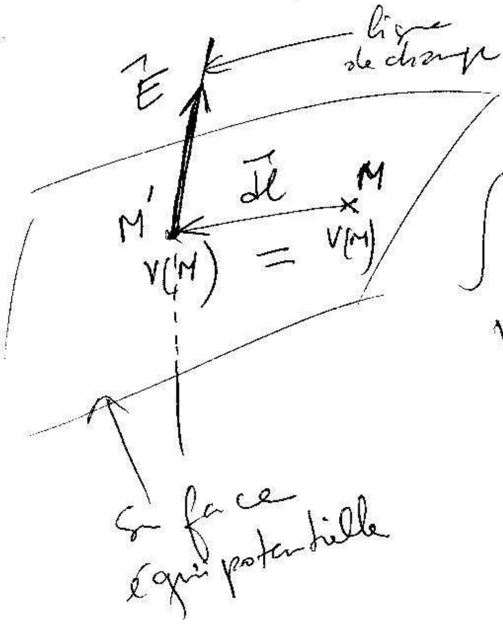
$$\int_{V(A)}^{V(A')} dV = -\int_{A}^{A'} \vec{E}\,\vec{dl} \Rightarrow V(A') - V(A) = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{AA'}$$

$$= -\|\vec{E}\|.\|\overrightarrow{AA'}\|$$

$$\Rightarrow V(A') - V(A) < 0 \Rightarrow \boxed{V(A') < V(A)}$$

Le champ $\vec{E}$ se dirige des pot haut aux pot. bas.

- Les surfaces équipotentielles sont tjs $\perp$ aux lignes de champ.



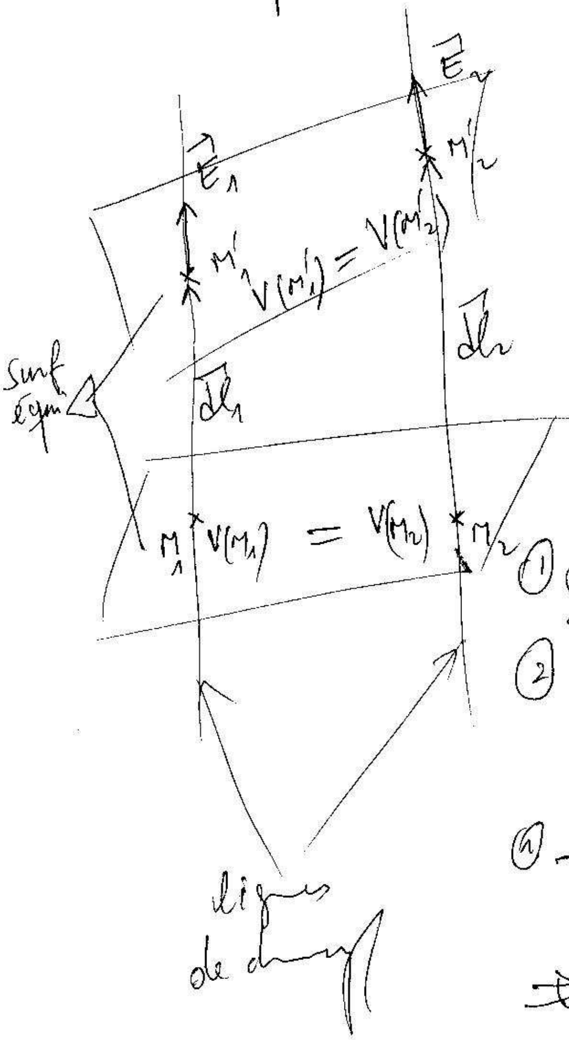
$$\overrightarrow{MM'} = \vec{dl}$$

$$\int dV = \int -\vec{E}\cdot\vec{dl}$$

$$V(M') - V(M) = 0$$

$$\boxed{\vec{E} \perp \overrightarrow{MM'}}$$

- les surfaces équipotentielles se rapprochent lorsqu'on passe d'une zone dont le champ $\vec{E}$ est inférieur à une autre zone dont le champ $\vec{E}$ est sup.



$$dV_1 = -\vec{E}_1 \cdot \vec{dl}_1$$

$$dV_2 = -\vec{E}_2 \cdot \vec{dl}_2$$

$$\vec{dl}_1 = \overrightarrow{M_1M'_1}$$

$$\vec{dl}_2 = \overrightarrow{M_2M'_2}$$

$$\begin{cases} ① \quad V(M'_1) - V(M_1) = -\|\vec{E}_1\| \cdot \|\overrightarrow{M_1M'_1}\| \\ ② \quad V(M'_2) - V(M_2) = -\|\vec{E}_2\| \cdot \|\overrightarrow{M_2M'_2}\| \end{cases}$$

$$① - ② \Rightarrow 0 = \|\vec{E}_2\| \cdot \|\overrightarrow{M_2M'_2}\| - \|\vec{E}_1\| \|\overrightarrow{M_1M'_1}\|$$

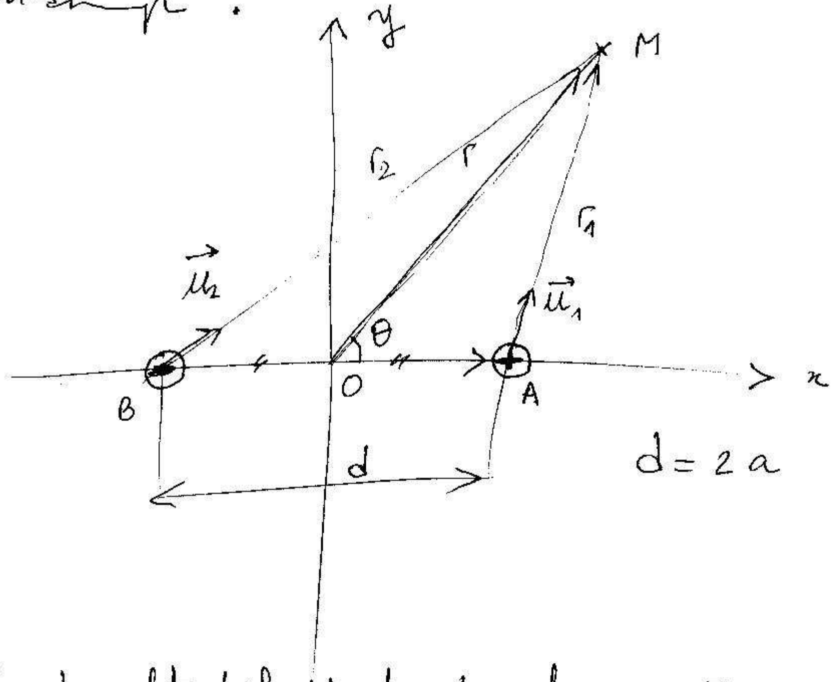
$$\Rightarrow \|\vec{E}_2\| \cdot \|\overrightarrow{M_2M'_2}\| = \|\vec{E}_1\| \cdot \|\overrightarrow{M_1M'_1}\|$$

$$\frac{\|\overrightarrow{M_2M'_2}\|}{\|\overrightarrow{M_1M'_1}\|} = \frac{\|\vec{E}_1\|}{\|\vec{E}_2\|}$$

si $\|\overrightarrow{M_2M'_2}\| > \|\overrightarrow{M_1M'_1}\| \Leftrightarrow \|\vec{E}_1\| > \|\vec{E}_2\|$

8. Dipôle électrique

Le dipôle électrique est un système de deux charges électriques de même valeur et de signes opposés, $+q$ et $-q$, séparées par la distance d, petite devant la distance r jusqu'au pt considéré du champ.



Calcul du potentiel V et du champ E

Calcul du potentiel V :

$$V_1 = K\frac{q}{r_1} \qquad V = \sum_{i=1}^{2} V_i = V_1 + V_2 = kq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$V_2 = -K\frac{q}{r_2}$$

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} \Rightarrow \vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$$

$$\|\vec{AM}\|^2 = \|\vec{OA}\|^2 + \|\vec{OM}\|^2 - 2\,\vec{OA}\cdot\vec{OM}$$

$$r_1^2 = a^2 + r^2 - 2ra\cos\theta$$

$$r_1^2 = r^2\left(1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r}\cos\theta\right) \overset{a \ll r}{\simeq} r^2\left(1 - 2\frac{a}{r}\cos\theta\right)$$

$$r_1 = r\left(1 - 2\frac{a}{r}\cos\theta\right)^{1/2} \Rightarrow \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-1/2}$$

Nous savons que : $(1+\varepsilon)^n = 1 + \frac{n\varepsilon}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2 + ---$

$$\left(1 - \frac{2a}{r}\cos\theta\right)^{-1/2} \approx 1 - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot 2\frac{a}{r}\cos\theta = 1 + \frac{a}{r}\cos\theta$$

$$\boxed{\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta\right)}$$

$$\vec{BM} = \vec{BO} + \vec{OM} \Rightarrow \|\vec{BM}\|^2 = \|\vec{BO}\|^2 + \|\vec{OM}\|^2 + 2\,\vec{BO}\cdot\vec{OM}$$

$$r_2^2 = a^2 + r^2 + 2ar\cos\theta$$

$$r_2^2 = r^2\left(1 + \frac{a^2}{r^2} + 2\frac{a}{r}\cos\theta\right) \overset{a \ll r}{\simeq} r^2\left(1 + 2\frac{a}{r}\cos\theta\right)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 + 2\frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-1/2}$$

$$\left(1 + \frac{2a}{r}\cos\theta\right)^{-1/2} \simeq 1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)2\frac{a}{r}\cos\theta = 1 - \frac{a}{r}\cos\theta$$

$$\boxed{\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta\right)}$$

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{2a}{r^2}\cos\theta$$

$$V = Kq\,\frac{2a}{r^2}\cos\theta \qquad K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

$$\boxed{V = \frac{2aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Le moment électrique du dipôle est définit par :

$$\vec{p} = q\vec{d} \Rightarrow p = qd = 2aq$$

le vecteur $\vec{d}$ est dirigé suivant l'axe du dipôle de la charge négative à la charge positive.

V en fonction de p est donc :

$$\boxed{V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Calcul du champ E :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}\right)$$ en coords cartésiennes

en coordonnées polaires le $\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ est :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ \dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{-p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$

$$\vec{E} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u}_r + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u}_\theta$$

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

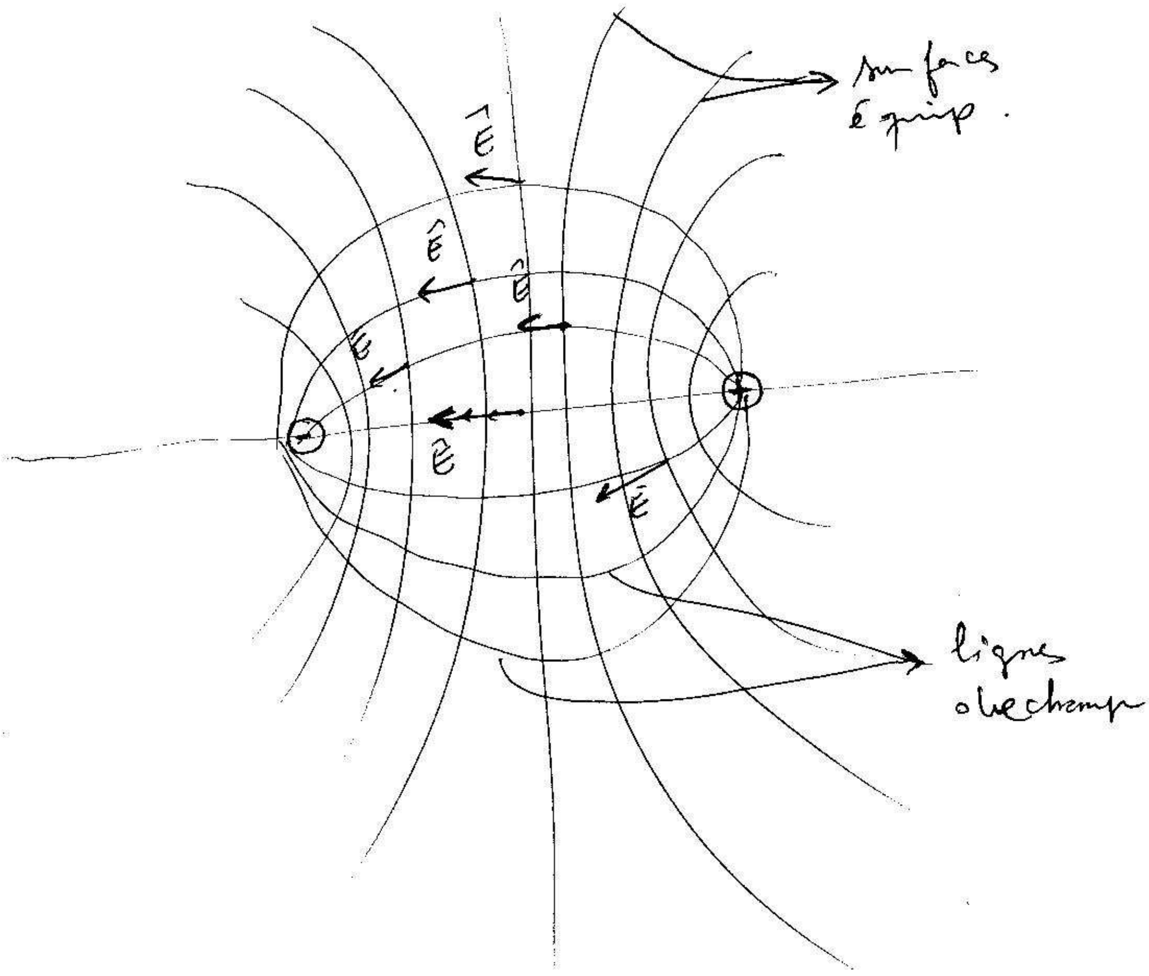
$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

$\theta = 0 \Longrightarrow E = \dfrac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

$\theta = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow E = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

etc ... $\Longrightarrow E = ($

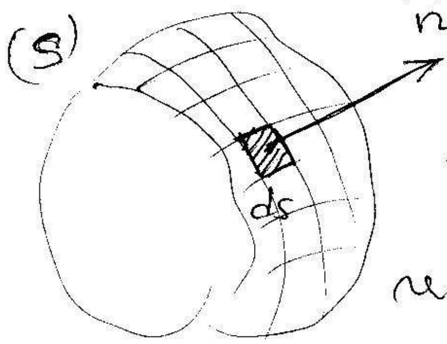
lignes de champ et surfaces équipotentielles



9. Théorème de Gauss

a) Représentation d'une surface par un vecteur

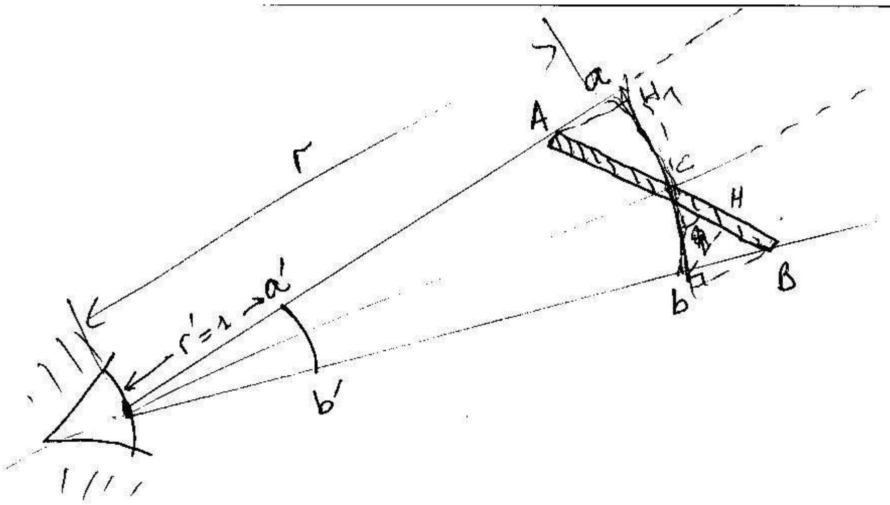
Soit une surface S et $\vec{n}$ la normale à cette surface. Si on prend un élément de surface dS, on peut représenter dS par l'expression vectorielle :



$$\boxed{d\vec{S} = \vec{n}\, dS}$$

b) L'angle solide

- Angle ds le plan : L'angle sous lequel est vue un segment de droite AB depuis un pt O est l'arc de la portion de cercle de rayon 1, de centre O, délimité par les rayons joignant l'arc au pt O. L'unité de cet angle est le degré.



$$\overset{\frown}{ab} = r\alpha$$

$$\overset{\frown}{a'b'} = r'\alpha = 1 \times \alpha$$

si l'angle α est très petit : $\alpha \to d\alpha$

$$\begin{cases} \alpha \longrightarrow d\alpha \\ \overset{\frown}{ab} \longrightarrow ab \\ AB \longrightarrow dl \end{cases}$$

$$ab = \cancel{K}\, d\alpha$$

$\cos\theta = \dfrac{H_1C}{AC}$, $\cos\theta = \dfrac{CH_2}{CB}$

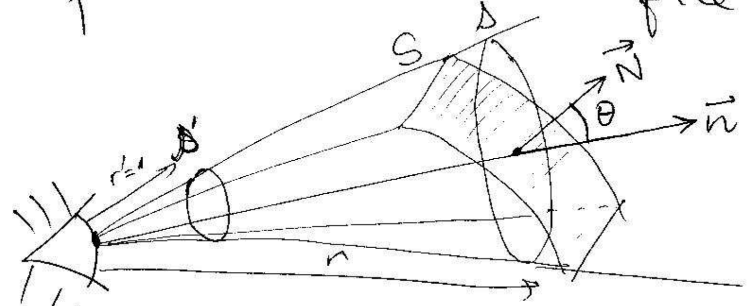
$$ab = \underbrace{H_1C + CH_2}_{ab} = AC\cos\theta + CB\cos\theta$$

$$= AB\cos\theta.$$

$$r\,d\alpha = dl\cos\theta$$

$$d\alpha = \frac{dl\cos\theta}{r} \Rightarrow \alpha = \int \frac{dl\cos\theta}{r}$$

- <u>Angle solide</u> : Soit à définir maintenant une grandeur caractéristique de l'étendue spatiale sous laquelle on voit une surface S qque.



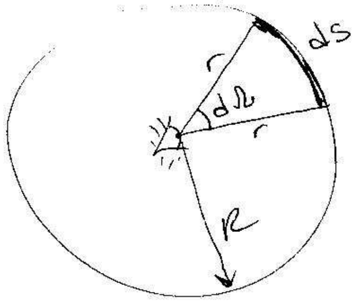
L'unité de cet angle est le stéradian.

par analogie avec la définition précédente, on définit l'angle solide $d\Omega$ comme ~~étant~~ ayant pour mesure la surface S interceptée sur la sphère de rayon l'unité.

$$d\Omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2} \Rightarrow \Omega = \iint \frac{dS\cos\theta}{r^2}$$

- <u>Cas particulier</u> : l'angle solide de tout l'espace :

$$d\Omega = \frac{dS \cos\theta}{r^2} \Rightarrow \Omega = \int \frac{dS \cos\theta}{r^2} = \frac{S \cos\theta}{r^2}$$



$\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$

$r = R$

La surface d'une sphère est : $4\pi R^2$

$$\Omega = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi .$$

(Electricité et ondes Ph8/140).

c) <u>Flux du vecteur champ électrique</u>

On appelle flux de $\vec{E}$ à travers dS, élément de S, la quantité scalaire, positive ou négative :

$$d\phi = \vec{E} . \vec{dS}$$

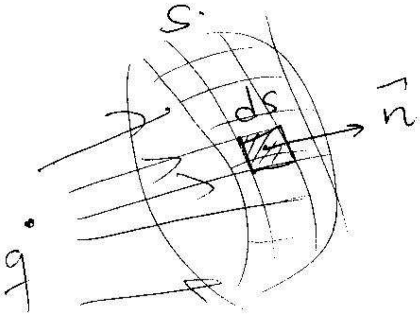
$$\vec{dS} = \vec{n} dS$$

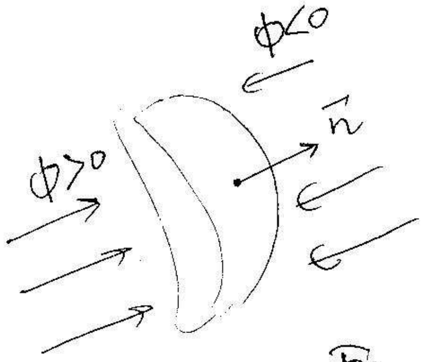
$$\boxed{d\phi = \vec{E} . \vec{n} dS}$$

Le flux total total produit à travers S est :

$$\boxed{\Phi = \iint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\, dS}.$$

l'unité du flux est le : V.m.





$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \Rightarrow \Phi = \sum_i \Phi_i$$

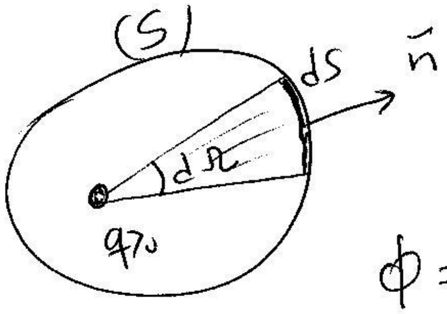
$$d\phi = \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \cos\theta$$

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q \cdot \underbrace{\frac{\cos\theta \, dS}{r^2}}_{d\Omega}$$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot d\Omega$$

- <u>q à l'int de la surface :</u>



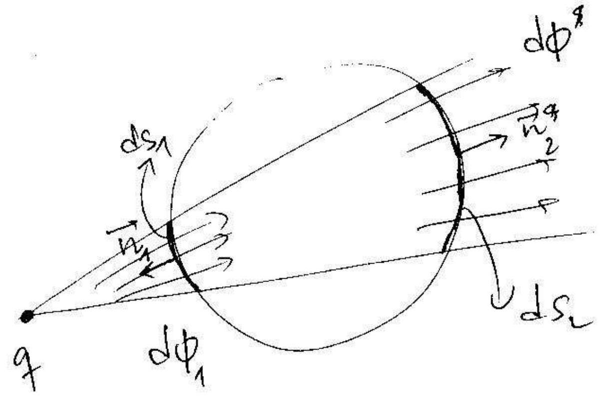
$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

dans le cas de n charges à l'int. de S, on obtient :

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i^n q_i$$

- q à l'ext. de la surface



$$d\phi_1 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega \quad , \quad d\phi_2 = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

Le flux total à travers dS_1 et dS_2 est :

$$d\phi_T = d\phi_1 + d\phi_2 = -\cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}}d\Omega + \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}}d\Omega = 0$$

dans le cas de plusieurs charges à l'ext de la surface $\phi_T = 0$.

Théorème de Gauss :

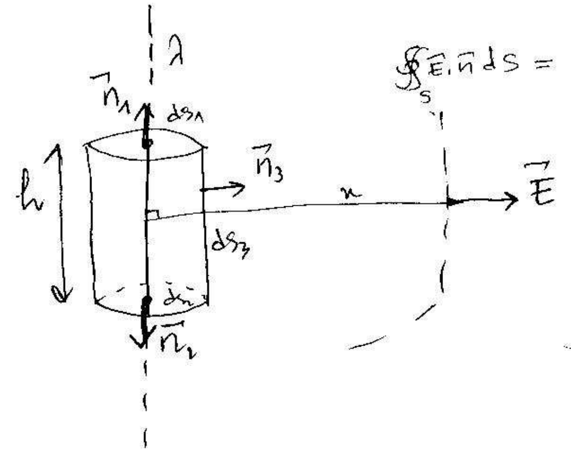
$$\begin{cases} \phi = \oiint_S \vec{E}.\vec{n}\,ds \\ \phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i \end{cases} \Rightarrow \boxed{\oiint \vec{E}.\vec{n}\,ds = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i}$$

le flux ~~sortant~~ à travers une surface fermée est égale à la somme algébrique des charges se trouvant à l'intérieur de cette surface fermée qui est imaginaire (dite aussi surface de Gauss) sur ε_0.

Choix de la surface de Gauss (conditions)

- Il faut que la surface de Gauss soit fermée.
- En tout pts de la surface, il faut que le vecteur $\vec{E}$ soit $\perp$ à la surface de Gauss ou $//$ à $\vec{n}$ (normale à la surface)
- Il faut que cette surface passe par le pt sur lequel on veut calculer le champ.

Exemple : 1) Reprenons l'exemple du fil infini chargé avec λ.



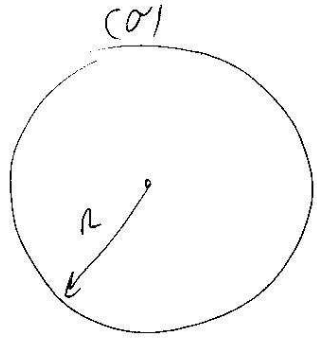
$$\oiint_S \vec{E}.\vec{n}\,dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i \Rightarrow \underbrace{\iint \vec{E}.\vec{n}_1 ds_1}_{0} + \underbrace{\iint \vec{E}.\vec{n}_2\, ds_2}_{0} + \underbrace{\iint \vec{E}.\vec{n}_3 ds_3}_{=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i}$$

$$E \times S_3 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$

$$E \times 2\pi r \cancel{h} = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda \cancel{h}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

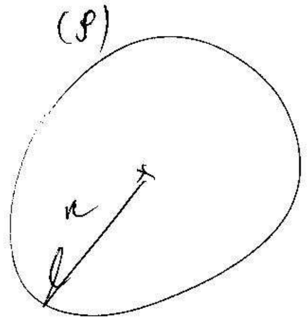
2) sphère chargée avec σ



M à l'ext

M à l'int

3) sphère chargée avec ρ



M à l'ext

M à l'int