Série N°1(Les Fonctions holomorphes)

Exercice N° 1:

Réécrire les conditions de Cauchy Riemann en coordonnées polaires .

Exercice N° 2:

Soit F définie sur C par

$$F(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Montrer que F est vérifie les conditions de Cauchy Riemann. Conclure

Exercice N° 3:

Dire si les fonctions suivantes sont dérivables de C dans C ? (a et b sont deux réels données)

$$f(z) = (ax - iby)^2 + i(bx + aiy)$$

$$k(z) = |z| + i\Re e(z)$$

$$h(z) = \frac{\bar{z}}{z^2+1} - \bar{z}^2$$

$$g(z) = \ln|z| + iArctg\frac{z-\bar{z}}{i(z+\bar{z})}$$

Exercice N° 4:

Montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques. α et β des réels donnés.

$$u_1(x,y) = 2x^2 - 2y^2 + 3y$$

$$u_2(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$$

$$u_3(x,y) = \alpha\ln(x^2+y^2) + \beta$$

Déterminer v_k la fonction harmonique conjugué de u_k. Exprimer $u_k + iv_k$ à l'aide de la seule variable z

Exercice N° 5:

Peut –on déterminer une fonction f, dérivable de C^* dans C, telle que

$\Re e(f(z) = Arctg(\frac{y}{x})$, et $f(1+i) = \pi/4$?

Dans l'affirmatif, en déduire une fonction g, de C^* dans C, telle que

$\Im m g(z) = Arctg(\frac{y}{x})$ (on utilisera la détermination principale du logarithme)