



Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès.

Faculté des Sciences de l'Ingénieur.

2^{ème} Année L.M.D. Sciences & Techniques.



TD. N° **3** Séries Entières.

Exercice 1 Quelles précisions a-t-on sur le rayon de convergence, et sur la convergence ou la divergence d'une série entière pour chaque cas,

- | | | |
|---|--|--------------------------------------|
| 1. la série converge en $x_0 = 6$. | | 4. la série converge en $x_0 = -3$. |
| 2. la série converge en $x_0 = 2$ et diverge en $x_1 = -10$. | | 5. la série diverge en $x_0 = -5$. |
| 3. la série converge en $x_0 = 2$ et diverge en $x_1 = -1$. | | 6. la série diverge en $x_0 = 0$. |

Exercice 2 Donner un exemple de deux séries entières de même rayon de convergence $R_1 = 1$, et la somme a pour rayon de convergence $R_2 = +\infty$.

Exercice 3 Donner le domaine de convergence des séries entières suivantes.

$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-\sqrt{n}} x^n.$	$\bullet \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n \text{Log } n}{\sqrt{n}}.$	$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{3n}}{n^2}.$
$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sh } n}{\text{ch}^2 n} x^n.$	$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n) x^n.$	$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n.$

Exercice 4 Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes en précisant le domaine de convergence :

$\bullet 2 \sin x \sin 3x.$ $\bullet \frac{x}{\sqrt[3]{1-2x^5}}.$ $\bullet \cos^2 x.$ $\bullet \text{Argsh } x - \text{Arcsin } x.$ $\bullet e^x \text{sh}(3x) \text{ch}(2x).$ $\bullet \frac{x^2 - 4x + 8}{x^2 - x - 6}.$

Exercice 5 Développer en série entière au voisinage de x_0 les fonctions suivantes en précisant le domaine de convergence :

$\bullet f(x) = \frac{4x^2 + 3x - 4}{2x + 1}, x_0 = 1$ $\bullet g(x) = \sin x, x_0 = 2.$ $\bullet h(x) = \text{Log}(2x - 1), x_0 = 3.$

Exercice 6 Trouver le rayon de convergence des séries suivantes, puis calculer leurs sommes. Etudier ces sommes aux bornes du domaine de convergence.

$\bullet \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-ex)^n}{2^{4n}}.$ $\bullet \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 7n - 4) x^n.$ $\bullet \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n^2 x^n}{(n-1)(n+2)}.$ $\bullet \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!} x^n.$

Exercice 7 Résoudre l'équation différentielle suivante à l'aide d'une série entière :

$\bullet y'' - 2xy' - 2y = 0$, avec les conditions initiales, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 8 Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n^2 + n)}$

Exercice 9 Donner le rayon de convergence de la série entière suivante, puis calculer sa somme.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ où } a_{2n} = 5^{-2n} \text{ et } a_{2n+1} = 7^{-3n}.$$

Que vaut cette somme aux bornes du domaine de convergence ?