**Département de Physique**

***Série N°2 Math3 (Suites et Séries de fonctions)***

**Exercice N° 1:**

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions définies sur $x \in [0,1]$ par $f_n(x) = x^n$

**Exercice N° 2:**

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$f_n(x) = nx^n(1-x) \qquad \text{et} \quad x \in [0,1]$$

Etudions sa convergence simple (CVS) et sa convergence uniforme (CVU).

**Exercice N° 3:**

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions définies sur $x \in [0,1]$ par $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$

**Exercice N° 4:**

Démontrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ de terme général : $f_n(x) = x(1-x)^n$

n'est pas convergente uniformément pour $0 \langle x \langle 2$

**Exercice N° 5:**

Etudier la convergence uniforme des séries des termes générales suivantes :

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^4} \qquad 1 \leq n$$

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}} \qquad 1 \leq n$$

$(n+1)^2 x^2$

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2} \qquad 1 \leq n$$

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2} \qquad 1 \leq n$$

**Exercice N° 6:**

Démontrer que la série de terme général :

$0 < a < b \qquad 1 \leq n \qquad V_n(x) = (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$

Converge uniformément pour tout x de $[a,b]$ mais elle n'est pas absolument convergente.

**Exercice N° 7:**

Etudier la convergence simple et absolue des séries de termes générales suivantes :

$$U_n(x) = x^n + \frac{1}{(3x)^n} \qquad U_n(x) = \frac{1}{1 + xn^2} \quad x \in \mathbb{R}^*$$

$$U_n(x) = e^{-nx} \cos x \qquad U_n(x) = \frac{1}{1 + x^n}$$

**Exercice N° 8**

Soit la série de terme générale suivante: $S_n(x) = nxe^{-nx^2}$

Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)dx$ , $\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)dx$

**Exercice N° 9 :**

Montrer que la série de terme générale : $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-\sqrt{n}\,x}}{n}$

Converge uniformément sur $\Re^+$

**Exercice N° 10 :**

Etudiez la convergence des séries $\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} f'_n(x)$ avec :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + \sin nx}$$

$f'_n(x) = \dfrac{n \cos nx}{(n^2 + \sin nx)^2}$

$-1 < \cos nx < 1$

$-n < n \cos nx < n$

$n < -n \cos nx < -n$

$\boxed{n \geq |n \cos nx|}$