Université de M'sila
Faculté des Sciences
Département de Physique

M'sila le : [illegible]4 /01/ 2011

EXAMEN DE MATH3

Exercice N° 1: (08 pts)

Etudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq1} \frac{\ln n}{n^3} \;;\; \sum_{n\geq1} \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}} \;;\; \sum_{n\geq0} \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{n+1}{n+2}\right) \;;$$

$$\sum_{n\geq1} (-1)^n \frac{n}{(n+1)e^n} \;;\; \sum_{n\geq1} \left(\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)^{n^2}$$

Exercice N° 2: (06 pts)

Développer en série entière au voisinage du 0 la fonction :

$$f(x) = \frac{x+2}{1-x^2} \;.$$

Exercice N° 3 : (06 pts)

Intégrer les équations différentielles suivantes :

1) $y = xy' - \ln(1+y')$

2) $y'' - 4y' + 3y = \dfrac{2x+1}{x^2} e^x$

BONNE CHANCE

Correction d'examen du MATH3 2011

Exercice N°1 :

$\lim_{n\to+\infty} n^p u_n = k \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{\ln n}{n^3} = \frac{\ln n}{n} = 0$ $(p=2, k=0)$ (1)

la série est convergente

) $\lim_{n\to+\infty} n^{1/2} \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$ $\left(\begin{smallmatrix} p=1/2 \\ k=+\infty \end{smallmatrix}\right)$ (1)

la série est divergente.

$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ la série diverge (1)

D'après la règle de d'Alembert :

$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{e^{n+1}} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ la série converge (1)

0,5

D'après la règle de Cauchy

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}$ (1)

$= \lim_{n\to+\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$ (1)

$\left(\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (0,5) $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-\sqrt{n}} = 0 < 1$ (0,5)

$\Rightarrow$ la série converge.

Exercice N°2 : (1)

On a : $f(x) = \frac{x+2}{(1-x)(1+x)} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right]$

nous avons la série géométrique $\sum_{n\geq 0} x^n$ et $\sum_{n\geq 0} (-x)^n$

$x \in]-1,1[: \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ (1)

$x \in]-1,1[: \sum_{n\geq 0} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$ (1)

Donc par conséquence :

$x \in]-1,1[: f(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0} 3(-x)^n + \sum_{n\geq 0} x^n\right)$ (1)

$x \in]-1,1[: f(x) = \frac{1}{2}\left[\sum (3(-1)^n + 1) x^n\right]$ (2)

Exercice N°3 :

1) C'est une éq de Clairaut $\Rightarrow$ on pose $y' = p$ (0,5)

$\boxed{y = xp - \ln(1+p)}$ $\quad y = xy' + g(y')$

on dérive / à x :

$p = p + \frac{dp}{dx}\left(x - \frac{1}{1+p}\right) \Rightarrow \frac{dp}{dx}\left(x - \frac{1}{1+p}\right) = 0$ (0,5)

soit $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c^{te}$ ..... (1)

soit $x - \frac{1}{1+p} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{1+p}$ ... (2)

on a alors d'après on a :

(1) une solution générale $\boxed{y = xc - \ln(1+c)}$ (0,5)

2ème solution singulière $\boxed{y = 1 - x + \ln x}$ (0,5) (ou bien $y = \frac{p}{1+p} - \ln($

2) l'éq homogène : $y'' - 4y' + 3y = 0$

$\Rightarrow$ l'E caractéristique : $r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3$

$\Rightarrow y_H = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$ (1)

on utilise la méthode de changement des constant

$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{3x} = 0 \\ c_1' e^x + 3c_2' e^{3x} = \frac{2x+1}{x^2} e^x \end{cases}$ 0,5

$\Rightarrow c_1'(x) = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right)$ par intégration on trouve

$\Rightarrow c_1(x) = -\ln|x| + \frac{1}{2x} + k_1$ (1)

$\Rightarrow c_2'(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right)e^{-2x}$ on intègre par partie $\left(\int \frac{1}{2x^2} e^{-2x}\right)$

$c_2(x) = -\frac{1}{2x} e^{-2x} + k_2$ (1)

et la solution générale de l'éq est :

$y = -\ln|x| e^x + k_1 e^x + k_2 e^{3x}$ (0,5)

note 18