Cours sur les équations différentielles

IUP génie civil, première année

20 mars 2003

Version sans dessin

Alexandre MIZRAHI
Université de Cergy Pontoise

Table des matières

Chapitre 1

Équations différentielles linéaires

1.1 Généralités

Dans ce cours la solution d'une équation différentielle (E) est une fonction autant de fois dérivable que nécessaire, définie sur **un intervalle**, de $\mathbb{R}$ et qui vérifie (E)

Exemple 1.1 la fonction exponentielle est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

Exemple 1.2 La fonction définie par $\frac{1}{x}$ est une solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation différentielle

$$y'' - 2y^3 = 0$$

Définition 1.1 *On appelle équation différentielle linéaire une équation différentielle de la forme*

$$(E) : \sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = b$$

où les a_n et b sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ et les $y^{(n)}$ sont les dérivées énièmes de la fonction inconnue y.

Définition 1.2 *On appelle solution générale de (E) une formule dépendant d'un certain nombre de constantes, et qui donne toutes les solutions de (E), lorsque ces constantes changent de valeurs.*

Définition 1.3 *L'entier N $(a_N \neq 0)$ qui correspond au plus grand ordre de dérivation s'appelle l'ordre de l'équation différentielle (E).*

Exemple 1.3 $y'' + xy' + y = x^2 + 1$ est une équation différentielle linéaire, d'ordre 2.

Exemple 1.4 $(y')^2 + y = 2$ est une équation différentielle non linéaire, d'ordre 1.

Exemple 1.5 $y^{(4)} + x^3 y' + ln(x)y = x^2 + 1$ est une équation différentielle linéaire, d'ordre 4

Exemple 1.6 $(y'') + \ln(y) = 2$ est une équation différentielle non linéaire, d'ordre 2.

Définition 1.4 *L'équation linéaire (E) est dite à coefficients constants si les a_n ne sont pas des fonctions mais des réels*

Remarque 1.1 Une équation différentielle linéaire a des solutions réelles et des solutions complexes. Dans ce cours nous nous intéressons aux solutions réelles, mais il est parfois plus facile de trouver les solutions complexes. On peut alors trouver les solutions réelles en prenant les parties réelles des solutions complexes. En effet une fonction f à valeurs complexes est solution de (E) ssi $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont solutions.

Définition 1.5 *On appelle équation différentielle linéaire sans second membre (EDLSSM) associée à* (E) *l'équation différentielle* (E')

$$(E') : \sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = 0$$

Proposition 1.1 *Si* y_1 *et* y_2 *sont des solutions d'une équation différentielle linéaire sans second membre* (E') *alors* $y_1 + y_2$ *et* αy_1 *sont solutions de* (E') *pour tout réel* α*. Si* y_2 *est une solution d'une équation différentielle linéaire* (E) *alors* $y_1 - y_2$ *est solution de l'équation linéaire sans second membre associée ssi* y_2 *est aussi solution de* (E)*.*

preuve:

$$(E') \sum_{n=0}^{N} a_n (y_1 + y_2)^{(n)} = \sum_{n=0}^{N} a_n y_1^{(n)} + \sum_{n=0}^{N} a_n y_2^{(n)} = 0 + 0 = 0$$

$$(E') \sum_{n=0}^{N} a_n (y_1 - y_2)^{(n)} = \sum_{n=0}^{N} a_n y_1^{(n)} - \sum_{n=0}^{N} a_n y_2^{(n)} = b - b = 0$$

Corollaire: Les solutions S' de (E') forment un espace vectoriel et les solution S de (E) forment un espace affine de direction (E').

Preuve : trivial. La proposition précédente peut s'écrire :

La solution générale d'une équation différentielle linéaire est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation sans second membre.

Remarque 1.2 Si E est une espace vectoriel un espace affine $\mathcal{E}$ de direction E est un ensemble de la forme $\{a + f | f \in E\}$ où a est un élément quelconque de $\mathcal{E}$.

Proposition 1.2 *lemme de superposition : Pour déterminer une solution particulière de* $\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = f_1 + f_2$*, il suffit d'ajouter une solution particulière de* $\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = f_1$ *à une solution particulière de* $\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = f_2$

Preuve : Aucune difficulté

1.2 Équation différentielle du premier ordre

Dans ce paragraphe

$$(E) : y' + ay = b$$

$$(E') : y' + ay = 0$$

Théorème 1.1 *Les solutions de* (E) *sont les fonctions de la forme*

$$y(x) = e^{-\int^x a(t)\,dt} \left(\int^x b(u) e^{\int^u a(t)\,dt} du + K \right)$$

où $\int^x h(u)du$ *représente une primitive quelconque de la fonction* h *et* K *un réel quelconque.*

Preuve :

On note $-\int^x a(t)\,\mathrm{d}t$ une primitive quelconque de a prise au point x. Puisque la quantité $e^{\int^x a(t)\,\mathrm{d}t}$ne s'annule pas l'équation différentielle est équivalente à

$$(y'(x)+a(x)y(x))e^{\int^x a(t)\,\mathrm{d}t} = b(x)e^{\int^x a(t)\,\mathrm{d}t}$$

Or le premier terme n'est autre que

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}(y(x)e^{\int^x a(t)\,\mathrm{d}t})$$

En intégrant on obtient alors

$$y(x)e^{\int^x a(t)\,\mathrm{d}t} = \int^x b(u)e^{\int^u a(t)\,\mathrm{d}t}\mathrm{d}u$$

d'où le résultat annoncé.

Corollaire: Les solutions $\mathcal{S}'$ de (E') forment un espace vectoriel de dimension 1. Elles sont de la forme $(Ke^{-\int^x a(t)\,\mathrm{d}t})$ et les solutions de (E') forme un espace affine de direction $\mathcal{S}'$

Remarque 1.3 Ce qui peut encore s'énoncer :

> La solution générale d'une équation différentielle est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et d'une constante multiplié par une solution de l'équation sans second membre.

Méthode pratique de résolution de (E') : On remarque que la fonction nulle est solution, de plus si une solution s'annule en un point d'après le théorème précédent elle est nulle partout (en effet $K=0$). Soit y une solution de (E') qui n'est pas la fonction nulle et donc qui ne s'annule pas:

$$\frac{y'}{y} = -a$$

d'où en intégrant en x des deux cotés:

$$\ln(|y|) = \int^x -a$$

d'où

$$|y| = e^{\int^x -a\,\mathrm{d}x + K}$$

$$y = \pm e^{-\int^x a\,\mathrm{d}x}e^K = Ce^{-\int^x a}$$

En effet $\pm e^K$ est une nouvelle constante de signe quelconque que l'on note C.

Exemple 1.7 résolvons $2y' + 3xy = 0$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-3}{2}x$$

$$\ln(|y|) = \frac{-3}{4}x^2 + K$$

$$y = \pm e^{\frac{-3}{4}x^2+K} = \pm e^K e^{\frac{-3}{4}x^2} = Ce^{\frac{-3}{4}x^2}$$

K et C étant des réels quelconques.

Exemple 1.8 résolvons $(E) : 2y' + 3xy = x$ avec la condition initiale $y(0) = 0$ On a déjà résolu l'équation sans second membre, on remarque que $y = \frac{1}{3}$ est une solution de (E), les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$y = \frac{1}{3} + Ce^{\frac{-3}{4}x^2}$$

la condition initiale nous permet de calculer C

$$y(0) = 0 = \frac{1}{3} + Ce^{\frac{-3}{4}0^2}$$

la solution est donc

$$y = \frac{1}{3}(1 - e^{\frac{-3}{4}x^2})$$

Théorème 1.2 méthode de variation de la constante :
Cette méthode permet de trouver une solution particulière de l'équation avec second membre.
Pour résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre on peut utiliser la formule du théorème précédent mais l'on peut aussi commencer par résoudre l'équation sans second membre, on trouve alors une famille de solutions de la forme Kf où K est une constante qui appartient à $\mathbb{R}$ et f une solution non nulle de l'équation sans second membre. Les solutions forment une droite vectorielle dont la fonction f est une base.

On cherche alors une solution de l'équation différentielle avec second membre de la forme $K(x)f(x)$.

Exemple 1.9 Résoudre l'équation $xy' - 2y = x^3 ln(x)$

On commence par résoudre l'équation sans second membre sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$$

ce qui donne en intégrant $\ln(|y|) = 2ln(|x|) + k$ les solutions sont donc les fonctions $y(x) = Kx^2$, où K est un réel quelconque. Pour résoudre l'équation avec second membre faisons 'varier la constante' on note z la fonction $z(x) = x^2$ et l'on cherche une solution de la forme $K(x)z(x)$ l'équation différentielle devient

$$K'z + z'K + aKz = b$$

or $z' + az = 0$ donc finalement l'équation se ramène à $K'z = b$ il suffit alors d'intégrer

$$K'(z) = xln(x)$$

on obtient après une intégration par parties

$$K(x) = \frac{x^2}{4}(\ln(x^2) - 1)$$

d'où l'on déduit les solutions

$$y(x) = (\frac{x^2}{4}(\ln(x^2) - 1) + C)x^2$$

où C est un réel quelconque.

1.3 Équation différentielle linéaire d'ordre 2

Dans ce paragraphe

$$(E) : ay'' + by' + cy = d$$

$$(E') : ay'' + by' + cy = 0$$

a,b,c,d sont des fonctions et a est non nulle.

1.3.1 Cas des coefficients constants

Dans cette sous partie a,b,c sont des réels et a est non nul.

Théorème 1.3 *Les solutions de (E') forment un espace vectoriel de dimension 2, on appelle polynôme caractéristique de (E') le polynôme $P = aX^2 + bX + c$, soient r_1 et r_2 ses racines, trois cas sont possibles:*

1. *r_1 et r_2 sont deux racines réelles distinctes les solutions de (E') sont les fonctions de la forme:*

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

où C_1 et C_2 sont des réels quelconques.

2. *$r_1 = r_2$, P possède une racine double réelle les solutions de (E') sont les fonctions de la forme:*

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$$

où C_1 et C_2 sont des réels quelconques.

3. *r_1 et r_2 sont deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ $(r_2 = \alpha - i\beta)$*
4. *Les solutions de (E') sont les fonctions de la forme:*

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

où C_1 et C_2 sont des réels.

Remarque 1.4 On peut s'intéresser aux solutions complexes de cette équation différentielle, on obtient alors dès qu'il y a deux racines distinctes r_1 et r_2.

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

où C_1 et C_2 sont des complexes.

Preuve : D'abord il est clair que si r_1 est une racine (réelle ou complexe) du polynôme caractéristique la fonction définie par $y_1(x) = e^{r_1 x}$ est solution de (E'). Soit alors h une fonction, posons $z(x) = h(x)e^{-r_1 x}$ $h = zy_1$ est solution ssi

$$a(z''y_1 + 2y_1'z' + zy_1'') + b(z'y_1 + zy_1') + czy_1 = 0$$

donc h est solution ssi

$$az''y_1 + z'(2ay_1' + by_1) + z(ay_1'' + by_1' + cy_1) = 0$$

or y_1 est une solution de l'équation différentielle donc le coefficient en z est nulle : on s'est ramené à une équation du premier ordre en z'. Or

$$az''y_1 + (2ay_1' + by_1)z' = 0$$

que l'on résout en utilisant le fait que $y_1' = r_1 y_1$ (car $y_1(x) = e^{r_1 x}$) et $-\frac{b}{a} = r_1 + r_2$

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{(2ar_1 + b)}{a} = r_2 - r_1$$

donc h est solution ssi

$$z' = Ke^{(r_2 - r_1)x}$$

avec K une constante. Si le polynôme caractéristique a une racine double $r_2 - r_1 = 0$, $z = C_1 x + C_2$ et $h = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$. Sinon les racines sont distinctes et $r_2 - r_1 \neq 0$ donc $z = C_1 e^{(r_2 - r_1)x} + C_2$ donc $h = (C_1 e^{(r_2 - r_1)x} + C_2)e^{r_1 x}$ d'où le résultat. Si les racines sont complexes il suffit de prendre la partie réelle.

Remarque 1.5 Pour résoudre l'équation avec second membre on peut utiliser la méthode de variation des constantes ou voir le cas du second membre exponentielle polynôme.

1.3.2 Cas des coefficients quelconques

Remarque 1.6 Il n'existe pas de méthode générale de résolution de ces équations différentielles. Par contre il existe une méthode pour trouver une deuxième solution lorsqu'on connaît déjà une solution.

Proposition 1.3 Méthode de Laplace
Cette méthode permet de trouver une deuxième solution de l'équation sans second membre, lorsqu'on en connaît une.
Si y_1 est une solution de (E') il existe toujours une solution y_2 linéairement indépendante de y_1 qui est de la forme $y_2(t) = k(t)y_1(t)$, le calcul de k se ramenant à la résolution d'une équation du premier ordre.

Preuve :

$$y_2' = ky_1' + k'y_1$$

$$y_2'' = ky_1'' + 2k'y_1' + k''y_1$$

y_2 est solution de (E') ssi

$$a(ky_1'' + 2k'y_1' + k''y_1) + b(ky_1' + k'y_1) + c(ky_1) = 0$$

ce qui équivaut à

$$a(2k'y_1' + k''y_1) + b(k'y_1) = 0$$

car y_1 est solution de l'équation sans second membre (E'). On s'est bien ramené à une équation linéaire du premier ordre en k'.

Remarque 1.7 En fait on a démontrer plus que ce qui est annoncé, on a démontrer que si il existait une solution non nulle à l'équation différentielle sans second membre, alors on pouvait se ramener à une équation du premier ordre, les solutions formant alors un espace vectoriel de dimension deux, admettant y_1,y_2 pour base.

Exemple 1.10 Résoudre $2x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$
On remarque que $y_1(x) = x$ est solution, on cherche alors une solution de la forme $y_2(x) = k(x)y_1(x)$.
On a alors $y_2' = k'y_1 + ky_1'$ et $y_2'' = k''y_1 + 2k'y_1' + ky_1''$. Comme y_1 est solution de l'équation les trois termes ky_1'', ky_1', et ky_1 s'éliminent et il reste :

$$2x^2(k''y_1 + 2k'y_1') - 3x(k'y_1) = 0$$

soit

$$2x^3k'' + (4x^2 - 3x^2)k' = 0$$

dont on tire $\frac{k''}{k'} = \frac{-1}{2x}$, qui s'intègre en

$$k' = \frac{c}{\sqrt{x}}$$

que l'on intègre de nouveau en :

$$k = c_1\sqrt{x} + c_2$$

finalement les solutions sont les fonctions $y(x) = c_1x\sqrt{x} + c_2x$.

Proposition 1.4 *Méthode de variation des constantes: (admis) Si la solution générale de l'équation différentielle sans second membre (E') est de la forme $y = C_1y_1 + C_2y_2$ avec C_1 et C_2 des constantes, alors les solutions de l'équation différentielle avec second membre (E) peuvent se mettre sous la forme $z(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ où C_1 et C_2 sont liés par la relation $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$. Déterminer les fonctions C_1 et C_2 se ramène à la résolution de deux équations différentielles linéaires du premier ordre.*

Preuve :

$$z' = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2'$$

donc

$$z' = C_1y_1' + C_2y_2'$$

on peut alors calculer la dérivée seconde

$$z'' = C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2''$$

z est solution de l'équation différentielle ssi

$$a(C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2'') + b(C_1y_1' + C_2y_2') + c(C_1y_1 + C_2y_2) = d$$

en utilisant le fait que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation sans second membre on se ramène à l'équation:

$$a(C_1'y_1' + C_2'y_2') = d$$

Pour déterminer C_1 et C_2 il suffit donc de résoudre le système différentiel:

$$\left\{\begin{array}{l} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ a(C_1'y_1' + C_2'y_2') = d \end{array}\right.$$

Exemple 1.11 Résoudre $y'' + y = tan(x)$. Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions $C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$ avec C_1 et C_2 des réels. On cherche donc à résoudre le système:

$$\left\{\begin{array}{l} C_1'(x)\cos(x) + C_2'(x)\sin(x) = 0 \\ -C_1'\sin(x) + C_2'\cos(x) = \tan(x) \end{array}\right.$$

En utilisant les formules de Cramer on obtient :

$$C_1' = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & \sin(x) \\ \tan(x) & \cos(x) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}} C_2' = \frac{\det\begin{pmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & \tan(x) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}}$$

d'où le système

$$\left\{\begin{array}{l} C_1'(x) = -\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \\ C_2'(x) = \sin(x) \end{array}\right.$$

qui s'intègre en

$$\left\{\begin{array}{l} C_1(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right| + K_1 \\ C_2(x) = -\cos(x) + K_2 \end{array}\right.$$

Le résultat final est donc

$$y(x) = \left(\sin(x) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right| + K_1\right)\cos x + (-\cos(x) + K_2)\sin x$$

$$y(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right|\cos x + K_1\cos x + K_2\sin x$$

1.4 Équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$(E) : \sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = b$$

$$(E') : \sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = 0$$

où les a_n sont des réels, b une fonction et les $y^{(n)}$ sont les dérivées énièmes de la fonction inconnue y

Définition 1.6 *On appelle polynôme caractéristique de (E) ou de (E') le polynôme*

$$P(X) = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$$

Exemple 1.12 le polynôme caractéristique de l'équation $y''' - 2y'' + 3y = x$ est le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 + 3$.

Théorème 1.4 *(admis) Si le polynôme caractéristique de (E') se factorise sous la forme*

$$\prod_{k=1}^{m} (X - a_k)^{\alpha_k} \prod_{k=m+1}^{l} (X - (b_k + ic_k))^{\alpha_k} (X - (b_k - ic_k))^{\alpha_k}$$

les a_k sont les racines réelles de P, $(b_k \pm ic_k)$ sont les racines complexes conjuguées de P, et les α_k la multiplicité de ces racines. Alors les solutions de (E') sont les fonctions de la forme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} Q_k(x) e^{a_k x} + \sum_{k=m+1}^{l} e^{b_k x} (Q_k^1(x) \cos(c_k x) + Q_k^2(x) \sin(c_k x))$$

les Q_k,Q_k^1,Q_k^2 étant des polynômes arbitraires de degré strictement inférieur à α_k.

Remarque 1.8 Ce théorème est une généralisation du théorème 1.3

Exemple 1.13 Résoudre l'équation différentielle $y''' - 3y' + 2y = 0$.
Le polynôme caractéristique est $P(X) = X^3 - 3X + 2 = (X - 1)^2(X + 2)$. Ce qui dans le théorème correspond à $m = 2; a_1 = 1; \alpha_1 = 2; a_2 = -2; \alpha_2 = 1$ et il n'y a pas de racines complexes non réelles.Les solutions sont donc les fonctions:

$$f(x) = (ax + b)e^x + ce^{-2x}$$

avec $a; b$ et c des réels arbitraires. $ax + b$ est bien un polynôme quelconque d'ordre 1.

Exemple 1.14 Résoudre l'équation différentielle $y^{(6)} - y = 0$
Le polynôme caractéristique est

$$P(X) = X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{2i\frac{\pi}{3}})(X - e^{4i\frac{\pi}{3}})(X - e^{5i\frac{\pi}{3}})$$

Ce qui dans le théorème correspond à $m = 2; a_1 = 1; \alpha_1 = 1; a_2 = -1; \alpha_2 = 1; l = 4; b_3 + ic_3 = e^{i\frac{\pi}{3}}; b_4 + ic_4 = e^{3i\frac{\pi}{3}}$ .Les solutions sont donc les fonctions:

$$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} (C_3 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} x) + C_4 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} x)) + e^{-\frac{x}{2}} (C_5 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} x) + C_6 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} x))$$

avec les C_i des réels arbitraires.

Proposition 1.5 *Second membre exponentielle-polynôme (admis).*
Soit l'équation

$$(E) : \sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = e^{mx} T(x)$$

où m est un réel et T un polynôme. Il existe toujours une solution de (E) de la forme

1. *$e^{mx}Q(x)$ si m n'est pas une racine du polynôme caractéristique P de (E):*
2. *$x^{\alpha}e^{mx}Q(x)$ si m est une racine de multiplicité α du polynôme caractéristique P : .*

Dans les deux cas Q est un polynôme de même degré que T.

Exemple 1.15 Résoudre $y'' - 4y' + 4y = e^{3x}$.
Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{2x}$ le second membre est de la forme du théorème avec $m = 3$ et $T = 1$, m n'est pas racine du polynôme caractéristique, on cherche donc une solution particulière de la forme $Q(x)e^{3x}$ avec $deg(Q) = 0$ on trouve alors $9Q - 12Q + 4Q = 1$. La solution générale est donc

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{2x} + 1$$

Exemple 1.16 trouver une solution particulière de l'équation différentielle:

$$y'' - y' - 2y = x^2 e^x$$

Avec les notations du théorème précédent $m = 1$ qui est une racine de multiplicité 1 du polynôme caractéristique. On va donc chercher une solution particulière de la forme

$$y(x) = x(ax^2 + bx + c)e^x$$

On dérive deux fois y et on cherche des conditions sur a,b et c pour que y soit solution de l'équation de départ.

Remarque 1.9 Le résultat reste vrai pour les solutions complexes dans le cas où m est complexe. Ce qui permet de chercher des solutions particulières lorsque le second membre est un polynôme multiplié par un cosinus ou un sinus.

Exemple 1.17 Chercher un solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y' + y = x\sin(x)$.
On remarque que $x\sin(x) = \Im(xe^{ix})$, or i n'est pas racine du polynôme caractéristique, on peut donc chercher une solution complexe de la forme $y(x) = (\alpha x + \beta)e^{ix}$ avec $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ ce qui nous pousse à chercher des solutions réelles de la forme

$$y(x) = (ax + b)\cos(x) + (cx + d)\sin(x)$$

1.5 Théorèmes généraux

Théorème 1.5 *de Cauchy linéaire (énoncé rigoureux, admis): Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a_0,a_1,a_2,..,a_{N-1} et b des fonctions continues sur I, y_0,...,y_{N-1} des réels et t_0 un élément de I alors il existe une unique fonction y définie sur I telle que*

$$\begin{cases} y^{(N)} + \sum_{n=0}^{N-1} a_n y^{(n)} = b \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, y''(t_0) = y_2.....,y^{N-1} = y_{N-1} \end{cases}$$

Théorème 1.6 *(admis) Si $a_N = 1$ les solutions $\mathcal{S}'$ de (E') forment un espace vectoriel de dimension N et les solutions $\mathcal{S}$ de (E) forment un espace affine de direction $\mathcal{S}'$.*

Preuve : Il suffit de regarder l'application Φ de $\mathbb{R}^N$ dans l'espace des fonctions dérivables qui a un vecteur $(y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}$ associe l'unique solution de (E'), telle que $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, y''(t_0) = y_2 \ldots.., y^{N-1} = y_{N-1}$. Φ est bien définie d'après Cauchy, elle est clairement linéaire, et surjective. L'injectivité vient de l'unicité du théorème de Cauchy.

Remarque 1.10 Ceci implique donc que la solution générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre n s'écrit à l'aide de n constantes.

Corollaire: Si f est une solution de (E) alors $\mathcal{S}' = f + \mathcal{S}' = \{f + h | h \in \mathcal{S}'\}$

Exemple 1.18 Soit (E) l'équation différentielle $x^2y'' + xy' - 4y = 1$. L'équation sans second membre (E') est $x^2y'' + xy' - 4y = 0$, l'ensemble de ses solutions $\mathcal{S}'$ est un espace vectoriel de dimension 2 (car l'équation est d'ordre 2), on peut remarquer que x^2 et $\frac{1}{x^2}$ sont solutions or ces fonctions étant indépendantes elles forment une base de solutions.

$$\mathcal{S}' = \{ax^2 + \frac{b}{x^2} | a,b \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{S} = \{\frac{1}{4} + ax^2 + \frac{b}{x^2} | a,b \in \mathbb{R}\}$$

FIG. 1.1 – *Lorsque $N = 1$, en chaque point du plan passe une solution de l'ED*

FIG. 1.2 – *Lorsque $N = 2$, en chaque point M_0 du plan passe une et une seule solution de l'ED ayant une pente donnée*

Chapitre 2

Équation différentielle d'ordre 1

2.1 Généralités

Ce sont toutes les équations différentielles de la forme $F(x,y,y') = 0$ où F est une fonction de trois variables et y' la dérivée de la fonction inconnue y.

Exemple 2.1 $(y')^3+y' = 2y-x$ est une équation différentielle du premier ordre la fonction F de la définition étant définie par $F(x,y,z) = z^3 + z - 2y + x$

Exemple 2.2 $y\ln(y + y') - x = 0$ est une équation différentielle du premier ordre.

Remarque 2.1 Il n'y a pas de méthode générale pour résoudre les équations différentielles du premier ordre. Pour certaines familles d'entre elles il y a des méthodes (variables séparables, homogènes, différentielle totale, etc...)

2.2 Interprétation graphique

Dans le cas où l'équation se met sous la forme résolue en y

$$(E) : y' = f(x,y)$$

une fonction y est solution de (E) si en tout point de coordonnées $(x,y(x))$, la tangente à la courbe représentative de y a pour pente $f(x,y(x))$.
En chaque point (x,y) où la fonction f est définie, sa valeur donne la pente que doit avoir une solution passant par ce point.

FIG. 2.1 – *les solutions sont tangentes aux petits segments*

Définition 2.1 *On appelle isocline de coefficient α de l'équation (E) l'ensemble I_α des points M du plan pour lesquels les solutions de (E) ont une tangente de pente α en M.*

2.3 Équations différentielles à variables séparables

Définition 2.2 *Une équation différentielle du premier ordre est à variables séparables si elle peut se mettre sous la forme*

$$(E) : g(y)y' = f(x)$$

où g et f sont des fonctions.

Exemple 2.3 $y' \ln(1+y^2) = 2x$ est à variables séparables.

Exemple 2.4 $(1+x^2)y' = 1+y^2$ est à variables séparables car elle est équivalente à l'équation:

$$\frac{y'}{1+y^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Exemple 2.5 $(1+x^2)y' = y$ est linéaire et elle est à variable séparable (il faut quand même faire attention lorsque l'on va diviser par y, car y est une fonction qui pourrait s'annuler en certains points).

Proposition 2.1 *Soient G une primitive de g, F une primitive de f et y une fonction dérivable , y est solution de (E) ssi $G(y(x)) = F(x) + K$ où K est une constante arbitraire.*

Preuve : $\Leftarrow$ $G'(f(x))f'(x) = f(x)$ donc f est bien solution de (E)
$\Rightarrow$ $g(y(x))y'(x) = f(x)$
donc $\int(g(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x = \int(f(x))\,\mathrm{d}x$
donc $G(y(x)) = F(x) + K$

Remarque 2.2 Dans la pratique on pose les calculs comme ceci : on écrit $g(y)y' = f(x)$ de la façon suivante

$$g(y)\frac{dy}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

ce que l'on peut encore écrire

$$g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui, en intégrant des deux cotés donne

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$G(y) = F(x) + K$$

Lorsqu'on utilise cette notation pratique il faut bien remarquer que les y qui étaient des fonctions deviennent des variables dans l'intégrale et on les interprète comme des fonctions après l'intégration.

Exemple 2.6 Résoudre $y^2y' = x^2$
La méthode pratique vue précédemment nous permet d'écrire $y^2\,\mathrm{d}y = x^2\,\mathrm{d}x$ ce qui en intégrant nous donne

$$\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + K$$

on obtient donc la solution générale:

$$y(x) = \sqrt[3]{x^3 + C}$$

Exemple 2.7 Résoudre $y' \ln(y) = e^x$
On se ramène à $\ln(y)\,\mathrm{d}y = e^x\,\mathrm{d}x$
ce qui en intégrant donne $y\ln(y) - y = e^x + K$
on remarque que l'on ne trouve pas une expression pour y mais une relation (fonctionnelle) entre x et y.

Définition 2.3 *Soit (E) une équation différentielle on appelle intégrale première de (E) une fonction F tel que pour toute solution y de (E) il existe une constante K tel que*

$$F(x,y(x)) = K$$

On appelle intégrale première absolue une intégrale première F qui est telle que toute fonction dérivable qui vérifie $F(x,y(x)) = K$ est une solution de (E).

Remarque 2.3 La proposition 2.1 permet donc de déterminer une intégrale première absolue de (E). C'est une fonction pour lesquelles les solutions sont constantes sur les lignes de niveaux. Et les lignes de niveaux, définissent des solutions.

Exemple 2.8 Résoudre l'équation différentielle $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$
En intégrant on obtient

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = K$$

Les solutions sont données par $y = \pm\sqrt{K - x^2}$
On peut remarquer que sous la forme $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$ le x et le y jouent des rôles analogues, les cercles centrés en l'origine définissent des intégrales premières de l'équation. En effet si on paramètrise ces cercles par $x(t) = R\cos(t)$ et $y(t) = R\sin(t)$ on obtient alors

$$\mathrm{d}x = -R\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}y = R\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

On a bien $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$.

FIG. 2.2 – *Solutions de $x\,dx + y\,dy = 0$*

2.4 Différentielle totale

Rappel : Si F est une fonction de deux variables, sa différentielle est :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

Proposition 2.2 *Une expression de la forme $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ est la différentielle d'une fonction ssi*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

Preuve : c'est un cas particulier du fait qu'un champ est un gradient ssi son rotationnel est nul. On applique alors ce résultat au champs

$$(f(x,y),g(x,y),0)$$

et l'on calcule son rotationnel.

Proposition 2.3 *Les solutions de l'équation différentielle:*

$$(E) : f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = 0$$

lorsque $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ est la différentielle d'une fonction F sont définies par la relation fonctionnelle $F(x,y) = K$ où K est une constante quelconque. (F est une intégrale première de (E)).

Preuve : (E) peut s'écrire $f(x,y) + g(x,y)y' = 0$. Soit y une fonction dérivable,

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}(F(x,y(x))) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = f(x,y) + g(x,y)y'$$

donc y est solution de (E) ssi $F(x,y(x))$ est constant.

Exemple 2.9 Résoudre $(3x^2y^4 + y)\,\mathrm{d}x + (4x^3y^3 + x + 1)\,\mathrm{d}y = 0$. On peut commencer par vérifier que l'expression définit bien la différentielle d'une fonction. C'est le cas ssi

$$\frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^3 + x + 1) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^4 + y)$$

ce qui se vérifie de façon évidente.
Cherchons maintenant à déterminer cette fonction, elle doit vérifier

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y^4 + y$$

elle est donc de la forme

$$F(x,y) = x^3y^4 + xy + K(y)$$

où K est une fonction quelconque. En dérivant par rapport à y, on obtient

$$4x^3y^3 + x + K'(y)$$

or cette quantité doit être égale à $4x^3y^3 + x + 1$ on en déduit donc que $K' = 1$ d'où

$$F(x,y) = x^3y^4 + xy + y + C$$

où C est un réel.
Les fonctions $y(x)$ qui vérifient $x^3y^4 + xy = K$ sont solutions de l'équation différentielle.

Remarque 2.4 Si $f(x,y)\,\mathrm{d}x+g(x,y)\,\mathrm{d}y$ n'est pas la différentielle d'une fonction, mais que $h(x,y)(f(x,y)\,\mathrm{d}x+ g(x,y)\,\mathrm{d}y)$ l'est alors on dit que la fonction h est un facteur intégrant de l'équation différentielle

$$f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

il peut permettre de la résoudre.

Exemple 2.10 $\frac{1}{x^2}$ est un facteur intégrant de l'équation différentielle $x\,\mathrm{d}y - (y + 1 - x^2)\,\mathrm{d}x = 0$ on peut vérifier que $x\,\mathrm{d}y - (y + 1 - x^2)\,\mathrm{d}x$ n'est la différentielle d'aucune fonction.

$$\frac{\partial}{\partial x}x = 1 \neq -1 = \frac{\partial}{\partial y}(-(y + 1 - x^2))$$

En multipliant l'équation par le facteur intégrant on obtient la nouvelle équation

$$\frac{1}{x}\,\mathrm{d}y - \frac{y + 1 - x^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

maintenant l'expression est la différentielle d'une fonction F en effet

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x} = \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y + 1 - x^2}{x^2})$$

En intégrant comme dans l'exemple 2.9.
Les solutions sont alors les fonctions qui vérifient

$$\frac{y}{x} + \frac{1}{x} + x = K$$

Théorème 2.1 *de Cauchy (admis)*
L'équation différentielle $(E) : y' = f(x,y)$ où f est un fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un domaine $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$ possède une unique solution vérifiant $y(x_0) = y_0$ lorsque $(x_0,y_0) \in I \times J$, la fonction y est alors définie sur un intervalle contenant x_0 et inclus dans I.

Remarque 2.5 Contrairement au cas linéaire les solutions ne sont pas forcément définies sur l'intervalle I tout entier.

Chapitre 3

Résolution approchée d'équations différentielles du premier ordre

3.1 Méthode de Newton

Soit le problème suivant

$$(P) : \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Remarque 3.1 Le théorème 2.1 de Cauchy affirme que le système (P) précédent possède une unique solution ϕ, on va construire une suite de points (x_n,y_n) proche des points $(x_n,\phi(x_n))$.

On connaît la pente de la tangente à ϕ en (x_0,y_0) on approxime alors ϕ par sa tangente entre x_0 et $x_0 + h$, h est le pas de notre méthode, en général h doit être assez petit pour que l'approximation soit bonne. On note y_1 notre valeur approchée de $\phi(x_0 + h)$ On pose $x_1 = x_0 + h$; $x_2 = x_0 + 2h$ et $x_n = x_0 + nh$. L'équation de la tangente à ϕ passant par (x_0,y_0) est

$$y - y_0 = f(x_0,y_0)(x - x_0)$$

ce qui donne

$$y_1 = f(x_0,y_0)h$$

on recommence alors de la même façon en partant non plus de (x_0,y_0) mais de (x_1,y_1) on approxime la solution de l'équation différentielle $y' = f(x,y)$ passant par le point (x_1,y_1) par sa tangente et on obtient

$$y_2 = y_1 + f(x_1,y_1)h$$

de proche en proche on construit alors les suites de points :

$$x_n = x_0 + nh$$

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n,y_n)h$$

FIG. 3.1 – *On approxime la solution par une fonction affine par morceaux*

3.2 Convergence de la méthode de Newton

3.2.1 Prérequis

Dans tout le chapitre f est une fonction de classe C^2

1. développement limité d'ordre 1 en x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

ce qui s'écrit encore

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

2. Développement limité d'ordre 2 en x_0: pour tout réel h il existe un réel θ compris entre x_0 et $x_0 + h$ tel que:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(\theta)h^2$$

d'ou l'on déduit que si $|f''(x)| \leq M$ alors

$$|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h| \leq \frac{1}{2}h^2M$$

3. Suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$
si (u_n) tend vers une limite l, cette limite l vérifie la relation $l = al + b$ d'où

$$l = \frac{b}{1-a}$$

on pose alors $v_n = u_n - l$ et un calcul élémentaire donne $v_{n+1} = av_n$, donc (v_n) et (u_n) convergent ssi $\mid a \mid< 1$ (suite géométrique).

4. On reprend ce qui a été fait précédemment avec une inégalité (a>0). Soit (u_n) une suite telle que

$$u_{n+1} \leq au_n + b$$

on pose comme précédemment $v_n = u_n - l$, on obtient alors

$$v_{n+1} \leq av_n \leq a^2v_{n-1} \leq .... \leq a^{n+1}v_0$$

ce qui nous donne donc

$$u_n \leq l + a^n(u_0 - l) \leq \frac{b}{1-a} + a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)$$

5. $lim_{n\to\infty}(1 + \frac{a}{n}) = e^a$

3.2.2 Convergence

On suppose que f est définie sur $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$. On considère les suites définies dans la partie précédente. On note ϵ_n l'erreur faite à la n^{ieme} étape c'est à dire

$$\epsilon_n = |\phi(x_n) - y_n|$$

$$\epsilon_{n+1} = |\phi(x_n + h) - (y_n + f(x_n,y_n)h)|$$

on fait un développement limité de ϕ en x_n:

$$\epsilon_{n+1} = |\phi(x_n) + \phi'(x_n)h + \frac{h^2}{2}\phi''(\theta) - (y_n + f(x_n,y_n)h)|$$

or $\phi'(x) = f(x,\phi(x))$ donc en dérivant on obtient:

$$\phi'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\phi'$$

Quitte à se limiter à un domaine borné posons

$$M = sup|\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}f|$$

On a alors:

$$\epsilon_{n+1} \leq |\phi(x_n) - y_n| + h|f(x_n,\phi(x_n)) - f(x_n,y_n)| + \frac{1}{2}h^2M$$

on peut alors faire un DL:

$$|f(x_n,\phi(x_n)) - f(x_n,y_n)| \leq \sup_h |\frac{\partial f}{\partial y}(x_n,h)||\phi(x_n) - y_n| \leq \sup_{x,y} |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)||\epsilon_n| \leq M'\epsilon_n$$

on a donc

$$\epsilon_{n+1} \leq (hM' + 1)\epsilon_n + \frac{1}{2}h^2M$$

le prérequis 4 permet alors d'en déduire que

$$\epsilon_n \leq \frac{h^2M}{2hM'}\left((hM'+1)^n - 1\right)$$

Dans cette méthode nous avons deux paramètres qui varient : h et n, supposons que l'on cherche une valeur approchée de $\phi(X)$, ou X est un réel donné, si on découpe en n intervalles l'intervalle $[x_0,X]$, le pas devient

$$h = \frac{X - x_0}{n}$$

On a alors

$$\epsilon_n \leq \frac{(\frac{X-x_0}{n})M}{2M'}\left(\left(\left(\frac{X-x_0}{n}\right)M' + 1\right)^n - 1\right)$$

or

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{\alpha}{n} + 1)^n = e^\alpha$$

Donc la suite $(n\epsilon_n)$ est un suite bornée, donc (ϵ_n) tend vers 0 au moins aussi vite que $(\frac{1}{n})$.

3.3 Méthode de Runge Kutta

Nous reprenons l'équation différentielle précédente $y' = f(x,y)$, ce que nous avons fait dans la méthode de Newton peut s'interpréter par le calcul intégrale à l'aide d'aires. Soit donc ϕ la solution que nous cherchons à approcher, nous avons

$$\phi'(x) = f(x,\phi(x))$$

FIG. 3.2 – *Comparaison des méthodes des rectangles et des trapèzes*

et $\phi(x_0) = y_0$ en intégrant nous obtenons

$$\phi(x_0 + h) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t,\phi(t))\,\mathrm{d}t$$

Or dans la méthode de Newton on approche l'intégrale par l'aire d'un rectangle de cotés, h et $f(t,y_0)$, ce qui n'est pas une très bonne approximation de cette aire. Si on l'approxime par l'aire d'un trapèze l'approximation est bien meilleure.

D'autres méthodes comme la méthode de Simpson sont plus efficaces. De même ici la méthode de Runge Kutta permet un approximation bien plus précise de la solution .

Méthode de Runge Kutta: on définit les suites (x_n),(P_n),(Q_n),(R_n),(S_n) et (y_n)par

$$\left\{\begin{array}{l} x_n = x_0 + hn \\ P_n = (x_n,y_n) \\ Q_n = P_n + \frac{1}{2}h(1,P_n) \\ R_n = P_n + \frac{1}{2}h(1,f(Q_n)) \\ S_n = P_n + h(1,f(R_n)) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(f(P_n + 2f(Q_n) + 2f(R_n) + f(S_n)) \end{array}\right.$$

Remarque 3.2 Avec la méthode de Newton, on avait une convergence en au moins $\frac{1}{n}$ maintenant on a une convergence en au moins $\frac{1}{n^3}$, la convergence est donc beaucoup plus rapide.

Chapitre 4

Système d'équations différentielles

4.1 Généralités:

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ on note $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ les coordonnées de f. Dans tout ce chapitre, la variable est représentée par la lettre t, en particulier on dérive par rapport à t.

Exemple 4.1 Si $f(t) = \begin{pmatrix} 8t + \frac{1}{t} \\ 7 - 6e^{2t} \end{pmatrix}$ alors $f_1(t) = 8t + \frac{1}{t}$ et $f_2(t) = 7 - 6e^{2t}$ de plus $f'(t) = \begin{pmatrix} 8 - \frac{1}{t^2} \\ -12e^{2t} \end{pmatrix}$.

Soit $A : \mathbb{R} \to \mathbb{M}_n(R)$, $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$ et $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. On note (E) l'équation différentielle $Y' + AY = B$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est solution de (E) si $f'(t) + A(t)f(t) = B(t)$ le produit de A par f étant un produit matriciel.

Exemple 4.2 le système suivant $\begin{cases} y_1'(t) + ty_1(t) - t^2 y_2(t) + t^4 = 0 \\ y_2'(t) = \ln(t)y_1(t) - t^2 y_2(t) - e^t \end{cases}$ peut s'écrire $Y' + AY = B$ avec $A = \begin{pmatrix} t & -t^2 \\ -\ln(t) & t^2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -t^4 \\ e^t \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Exemple 4.3 résoudre le système suivant : $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$
Si (y_1, y_2) est solution alors $y_1'' = y_2' = y_1$ donc il existe des constantes K_1 et K_2 telles que $y_1 = K_1 e^x + K_2 e^{-x}$ et $y_2 = y_1' = K_1 e^x - K_2 e^{-x}$

On remarque que les fonctions trouvées sont bien solutions, et que les constantes de y_2 et de y_1 sont les même.

Définition 4.1 *On appelle système sans second membre associé à $(E) : Y' + AY = B$ le système $(E') : Y' + AY = 0$.*

Théorème 4.1 *(admis): Soit $A : \mathbb{R} \to \mathbb{M}_n(R)$ et $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des fonctions continues, (E) le système différentiel $Y' + AY = B$ et (E') le système sans second membre associé $Y' + AY = 0$ on a alors les résultats suivants:*

1. *Les solutions $\mathbb{S}'$ de (E') forment un espace vectoriel de dimension n.*
2. *Les solutions $\mathbb{S}$ de (E) forment un espace affine de direction $\mathbb{S}'$, c'est à dire que que si $h \in \mathbb{S}$ alors $\mathbb{S} = \{h + f \mid f \in \mathbb{S}'\}$.*
3. *Soit un réel t_0 et Y_0 un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Il existe une unique solution Y de (E) telle que $Y(t_0) = Y_0$.*

La solution générale d'un système différentielle linéaire d'ordre 1 de n équations à n inconnues que l'on sait résoudre s'écrit à l'aide de n constantes.

4.2 Cas des coefficients constants: résolution matricielle

Définition 4.2 *On dit que (E) : $Y' + AY = B$ est à coefficients constants si A est une matrice constante (indépendante de la variable de dérivation t).*

Exemple 4.4 $\left\{\begin{array}{l} x' = 2x + 3y - t \\ y' = x - 3y + 2t \end{array}\right.$ ceci revient à prendre $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \end{pmatrix}$

Proposition 4.1 *Lorsque la matrice A est diagonalisable, sa diagonalisation permet de résoudre le système : supposons que $A = PDP^{-1}$ alors en multipliant (E) à gauche par P^{-1} on obtient*

$$P^{-1}Y' + DP^{-1} = P^{-1}B$$

comme la dérivation est une opération linéaire $P^{-1}Y' = (P^{-1}Y)'$, si l'on pose alors $U = P^{-1}Y$ on obtient le système

$$U' + DU = P^{-1}B$$

qui se ramène à n équations différentielles du premier ordre.

Exemple 4.5 Soit (S) le système $\left\{\begin{array}{l} x' + 4x - 2y = 0 \\ y' + 3x - y = 0 \end{array}\right.$ ce qui revient à poser: $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Diagonalisons A, son polynôme caractéristique est

$$P(X) = (4 - X)(-1 - X) + 6 = (X - 1)(X - 2)$$

cherchons un vecteur propre associé à la valeur propre 1 : cela revient à chercher un élément du noyau de la matrice $A - I = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ convient.

De même pour la valeur propre 2 on cherche un vecteur du noyau de $A - 2I$ et le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

On a donc $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

On s'est ainsi ramené au système $U' + DU = 0$ qui s'écrit $\left\{\begin{array}{l} u_1' + u_1 = 0 \\ u_2' + 2u_2 = 0 \end{array}\right.$ qui se résout facilement $\left\{\begin{array}{l} u_1 = K_1e^{-t} \\ u_2 = K_2e^{-2t} \end{array}\right.$ On a donc $U = \begin{pmatrix} K_1e^{-t} \\ K_2e^{-2t} \end{pmatrix}$ d'où $Y = PU = \begin{pmatrix} 2K_1e^{-t} + K_1e^{-2t} \\ 3K_1e^{-t} + K_2e^{-t} \end{pmatrix}$ les solutions sont donc : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 2K_1e^{-t} + K_2e^{-2t} \\ y(t) = 3K_1e^{-t} + K_2e^{-t} \end{array}\right.$ où K_1 et K_2 sont des réels quelconques.

Remarque 4.1 On a utilisé P mais nous n'avons pas eut besoin de calculer P^{-1}

4.3 Forme des solutions dans le cas particulier des coefficients constants en dimension 2

Dans ce paragraphe (E') est l'équation $Y' + AY = 0$ où A est une matrice 2×2.

Proposition 4.2 *Notons λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A et (V_1,V_2) une base de vecteurs propres :*

1. *Si λ_1 et λ_2 sont réels alors les solutions dans la base (V_1,V_2) sont de la forme:*

$$\left\{\begin{array}{l} u_1(t) = K_1e^{\lambda_1 t} \\ u_2(t) = K_2e^{-\lambda_2 t} \end{array}\right.$$

FIG. 4.1 – *cas des valeurs propres réelles, à gauche de mêmes signes, à droite de signes opposés*

FIG. 4.2 – *cas des valeurs propres complexes conjuguées*

(a) *si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ alors lorsque t tend vers l'infini u_1 et u_2 tendent vers 0. On dit que le point O est un noeud propre stable.*

(b) *si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ alors lorsque t tend vers l'infini u_1 tend vers 0 et u_2 tend vers l'infini, lorsque t tend vers moins l'infini, on a le résultat inversé. On dit que le point O est un noeud instable.*

(c) *etc.*

2. *Si les valeurs propres sont complexes conjuguées ($\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = a + ib$), alors dans la base réelle ($\Re(V_1)$,$\Im(V_1)$) les solutions sont de la forme* $\left\{ \begin{array}{l} u_1(t) = e^{at}(K_1cos(bt) - K_2sin(bt) \\ u_2(t) = e^{at}(-K_1sin(bt) - K_2cos(bt) \end{array} \right.$

   (a) *si $a > 0$ on dit que O est un foyer répulsif.*

   (b) *si $a < 0$ on dit que O est un foyer attractif.*

Preuve :

1. Si les deux valeurs propres sont réelles distinctes. $AV_1 = \lambda_1 V_1$ et $AV_2 = \lambda_2 V_2$ donc dans la base (V_1,V_2) l'équation (E') s'écrit $\left\{ \begin{array}{l} u_1' + \lambda_1 u_1 = 0 \\ u_2' + \lambda_2 u_2 = 0 \end{array} \right.$ ce qui en intégrant chacune des équations différentielles donne le résultat annoncé.
2. Si les deux valeurs propres sont complexes conjuguées $\lambda_k = a \pm ib$, on résout le système dans $\mathbb{C}$: soit V_1 un vecteur propre associé à λ_1 alors $\overline{V_1}$ est un vecteur propre associé à λ_2 car

$$A\overline{V_1} = \overline{AV_1} = \overline{\lambda_1 V_1} = \lambda_2 \overline{V_1}$$

dans la base (V_1,$\overline{V_1}$) on a le système $\left\{ \begin{array}{l} u_1' + \lambda_1 u_1 = 0 \\ u_2' + \lambda_2 u_2 = 0 \end{array} \right.$ ce qui donne: $\left\{ \begin{array}{l} u_1 = H_1 e^{\lambda_1 t} \\ u_2 = H_2 e^{\lambda_2 t} \end{array} \right.$ où H_1 et H_2 sont des constantes complexes, parmi toutes ces solutions complexes il nous faut garder les solutions réelles. Les solutions complexes sont les fonctions de la forme:

$$U(t) = H_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + H_2 e^{\overline{\lambda_1} t} \overline{V_1}$$

U est réelle ssi $U = \overline{U}$ ssi $H_2 = \overline{H_1}$. Dans ce cas

$$U(t) = 2\Re(H_1 e^{\lambda_1 t} V_1) = 2\Re((K_1 + iK_2)e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt))(\Re(V_1) + i\Im(V_1))$$

ce qui donne finalement:

$$e^{at}\left((k_1\cos(bt) - k_2\sin(bt))\Re(V_1) + (-k_1\sin(bt) - k_2\cos(bt))\Im(V_1)\right)$$

4.4 Utilisation d'un opérateur différentiel D

On note D l'opérateur de dérivation, c'est à dire l'application linéaire qui à une fonction associe sa dérivée.

Exemple 4.6 $D(e^{3x}) = 3e^{3x}$

Exemple 4.7 $D(\ln(1 + x^2)) = \frac{2x}{1+x^2}$

Remarque 4.2 on peut écrire les équations différentielles à l'aide de l'opérateur D, par exemple l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' - 3y = 0$ s'écrit aussi $D^2y + 2Dy - 3y = 0$ où encore $(D^2 + 2D - 3I)y = 0$, résoudre (E) revient donc à déterminer le noyau de l'opérateur (ou application linéaire) : $D^2 + 2D - 3I$.

Proposition 4.3 *On peut écrire quelques résultats sur les équations différentielles linéaires du premier ordre à l'aide de D:*

1. $(D-\lambda I)y=0 \Leftrightarrow y'=\lambda y \Leftrightarrow y=Ke^{\lambda t}$*, c'est à dire ker*$(D-\lambda I)=\Re^{\lambda t}$.
2. $(D-\lambda I)y=f \Leftrightarrow y'=\lambda y+f \Leftrightarrow y=(K+\int fe^{-\lambda u}du)e^{\lambda t}$
3. $(D-\lambda I)y=e^{\mu t} \Leftrightarrow y'=\lambda y+e^{\mu t} \Leftrightarrow y=Ke^{\lambda t}+\frac{1}{\mu-\lambda}e^{\mu t}$

Exemple 4.8 Résoudre l'équation différentielle $y''+2y'-3y=0$ à l'aide de l'opérateur D : $(D^2+2D-3I)y=0$ on peut alors factoriser l'opérateur : $(D-I)(D+3I)y=0$ en utilisant la proposition précédente ceci est équivalent à

$$(D+3I)y=Ke^t$$

qui est équivalent à :

$$y=(K'+\int^t(Ke^ue^{3u}\mathrm{d}u))e^{-3u}=K'e^{-3t}+K''e^t$$

on retrouve ainsi un résultat connu sur les équations différentiel linéaire d'ordre 2.

Exemple 4.9 Résoudre le système suivant à l'aide de l'opérateur D : $\begin{cases} x'+2x+3y=0 \\ 3x+y'+2y=2e^{2t} \end{cases}$ le système peut s'écrire de la façon suivante : $\begin{cases} (D+2I)x+3y=0 \\ (3x+(D+2)y=2e^{2t} \end{cases}$
soit (x,y) un couple de fonctions, solution du système, on a

$$(D+2I)\left((D+2I)x+3y\right)=0 \text{ et } 3(3x+(D+2)y)=6e^{2t}$$

en soustrayant ces deux égalités on obtient:

$$(D^2+4D+4I)x-9x=-6e^{2t}$$

ce qui n'est autre que l'équation différentielle

$$(E):x''+4x'-5x=-6e^{2t}$$

Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions de la forme $K_1e^{-5t}+K_2e^t$, on cherche une solution particulière de la forme : ke^{2t} et on trouve $4k+8k-5k=-6$, les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme :

$$x(t)=K_1e^{-5t}+K_2e^t-\frac{6}{7}e^{2t}$$

on en déduit, à l'aide de la première équation différentielle du système que :

$$y(t)=-\frac{1}{3}(-5K_1e^{-5t}+K_2e^t-\frac{12}{7}e^{2t}+2K_1e^{-5t}+2K_2e^t-\frac{12}{7}e^{2t})$$

donc

$$\begin{cases} x(t)=K_1e^{-5t}+K_2e^t-\frac{6}{7}e^{2t} \\ y(t)=K_1e^{-5t}-K_2e^t+\frac{8}{7}e^{2t} \end{cases}$$

On a montré que si (x,y) était solution ce serait les fonctions précédentes, il reste à vérifier que les fonctions que l'on a trouvées sont bien solutions, on peut soit faire le calcul et vérifier que les fonctions ainsi trouvées sont bien solutions, soit remarquer que l'on a obtenu un espace affine de dimension 2 et que les solutions forment un espace affine de dimension 2, donc que toutes les fonctions trouvées sont bien solutions.

Chapitre 5

Introduction aux équations aux dérivées partielles

5.1 Rappels et mise en garde

1. Soit f une fonction de deux variables, définie sur une partie U de $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ représente la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x,y_0)$ au point x_0. Dans la pratique cela revient à calculer la dérivée de f par rapport à x en considérant y comme une constante.

   Exemple 5.1 Si $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ alors
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

2. Si $F(x,y)$,$g(x,y)$ et $h(x,y)$ sont des fonctions de deux variables alors
   $$\frac{\partial}{\partial x}F(g(x,y),h(x,y)) = \frac{\partial F}{\partial x}(g(x,y),h(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(g(x,y),h(x,y))\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$$

Remarque 5.1 Résoudre l'équation aux dérivées partielles (ou EDP)
$$(E) : \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$
revient à déterminer toutes les fonctions dont la dérivée par rapport à x est nulle. On voit que toutes les fonctions qui ne dépendent que de y sont solutions. On la résout ainsi : pour un y_0 fixé la fonction $x \mapsto f(x,y_0)$ a une dérivée nulle, elle est donc constante, finalement f ne dépend que de y_0 et donc f est de la forme : $f(x,y) = K(y)$. Réciproquement les fonctions de la forme $f(x,y) = K(y)$ vérifient bien (E).

Remarque 5.2 La fonction d'une variable définie par $f(x) = 1$ si $x \in [-2;-1]$ et 2 si $x \in [1;2]$ est une fonction dérivable de dérivée nulle, et elle n'est pas constante. Ceci peut arriver lorsque l'on résout des équations aux dérivées partielles aussi simple que (E). Ceci n'est plus possible si l'on travaille sur une partie convexe de $\mathbb{R}^2$. Dans la suite du cours nous ne nous préoccuperons plus de ce genre de problèmes qui peuvent exister.

5.2 EDP linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

Définition 5.1 *Ce sont les équations aux dérivées partielles de la forme*
$$(E) : \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} = h(x,y,f)$$
où α et β sont des réels.

Cas très particulier :

$$(E) : \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Les solutions sont les fonctions $f(x,y) = K(y)$ où K est une fonction quelconque d'une variable. Si l'on veut se limiter aux solutions de classe $\mathcal{C}^1$, il faut prendre K quelconque de classe $\mathcal{C}^1$.

Cas particulier :

$$(E) : \frac{\partial f}{\partial x} = h(x,y)$$

en intégrant par rapport à x on trouve que les solutions sont les fonctions de la forme

$$f(x,y) = \int^x h(x,y)\mathrm{d}x + K(y)$$

où K est une fonction quelconque.

Exemple 5.2 Résoudre $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{3xy}$. en intégrant par rapport à x on trouve

$$f(x,y) = \frac{1}{3y}e^{3xy} + K(y)$$

Exemple 5.3 Résoudre $\frac{\partial f}{\partial x} = f(x,y)e^{3xy}$. ce que l'on peut écrire

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = e^{3xy}$$

on fixe y et l'on intègre en x, on obtient donc

$$\ln \mid f(x,y) \mid = \frac{1}{3y}e^{3xy} + K(y)$$

d'où

$$f(x,y) = H(y)e^{\frac{1}{3y}e^{3xy}}$$

Cas général : On se ramène par un changement de variable linéaire au cas $\frac{\partial f}{\partial x} = h(x,y,f)$. Pour cela il suffit de poser $\left\{ \begin{array}{l} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{array} \right.$ et $f(x,y) = F(X,Y) = F(ax + by,cx + dy)$ on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial X}a + \frac{\partial F}{\partial Y}c \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial X}b + \frac{\partial F}{\partial Y}d \end{array} \right.$$

(E) est donc équivalente à l'équation:

$$\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial X}a + \frac{\partial F}{\partial Y}c\right) + \beta\left(\frac{\partial F}{\partial X}b + \frac{\partial F}{\partial Y}d\right) = h(x,y,f)$$

qui s'écrit encore

$$(a\alpha + b\beta)\frac{\partial F}{\partial X} + (c\alpha + d\beta)\frac{\partial F}{\partial Y} = h(x,y,f)$$

Il suffit alors de choisir a,b,c et d tel que le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial Y}$ soit nul.

Exemple 5.4 Résoudre l'équation :

$$(E) : 2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = f$$

On commence par poser $\left\{\begin{array}{l} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{array}\right.$ et $f(x,y) = F(X,Y) = 3F(ax+by,cx+dy)$ l'équation (E) est équivalente à

$$(2a+3b)\frac{\partial F}{\partial X} + (2c+3d)\frac{\partial F}{\partial Y} = F$$

posons $d = -2, c = 3, a = -1$ et $b = 1$ on a alors :

$$\frac{\partial F}{\partial X} = 3F$$

donc

$$F(X,Y) = K(Y)e^{3X}$$

où K est une fonction quelconque, finalement en remplaçant X et Y on obtient :

$$f(x,y) = K(3x-2y)e^{3(-x+y)}$$

par exemple les fonctions $e^{3(-x+y)}$ et $(3x-2y)e^{3x-2y}e^{3(-x+y)} = (3x-2y)e^{y}$ sont solutions de l'équation (E) respectivement pour $K(u) = 1$ et $K(u) = ue^{u}$.

5.3 EDP linéaire d'ordre 1, changement de variable

Remarque 5.3 Il existe une méthode générale, qui dépasse le niveau de ce cours pour trouver de bons changements de variables lorsque les coefficients ne sont pas constants

$$(E) : \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} = h(x,y,f)$$

où α et β sont des fonctions de x,y et f.

Exemple 5.5 Résoudre, en faisant un changement de variables polaires l'EDP

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = yf$$

On pose $\left\{\begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{array}\right.$ et $F(r,\theta) = f(x,y)$, on a alors

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} \end{array}\right.$$

d'où l'on déduit facilement par la méthode de Cramer par exemple :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(\theta)\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin(\theta)\frac{\partial F}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(\theta)\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\theta)\frac{\partial F}{\partial \theta} \end{array}\right.$$

ce qui en remplaçant dans l'équation de départ donne :

$$\cos(\theta)\left(r\cos(\theta)\frac{\partial F}{\partial r} - \sin(\theta)\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) + \sin(\theta)\left(r\sin(\theta)\frac{\partial F}{\partial r} + \cos(\theta)\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) = rF\sin(\theta)$$

ce qui donne

$$r\frac{\partial F}{\partial r} = rF\sin(\theta)$$

soit encore

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial r}}{F} = \sin\theta$$

qui s'intègre en

$$\ln|F(r,\theta)| = r\sin\theta + K(\theta)$$

finalement puisque $\theta = \arccos\left(\frac{y}{x}\right)$, les solutions sont les fonctions

$$f(x,y) = K(\frac{y}{x})e^y$$

où K est une fonction dérivable quelconque. On vérifie facilement que ces fonctions sont bien des solutions de l'EDP.

5.4 Méthode des caractéristiques

Proposition 5.1 *Si f est solution de l'équation aux dérivées partielles :*

$$(E) : \ \frac{\partial f}{\partial x} + \beta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

et Y une solution de $\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) = \beta(x,y)$, alors $f(x,Y(x,y))$ est une fonction de y, et ne dépend pas de x.

Preuve :

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,Y(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,Y(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,Y(x,y))\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,Y(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,Y(x,y))\beta(x,y) = 0$$

Théorème 5.1 *Soit P le problème suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \beta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ f(0,y) = u_0(y) \end{cases}$$

où β et u_0 sont des fonctions données et f l'inconnue. On note P^* le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial x} = \beta(x,y) \\ Y(0,y) = y \end{cases}$$

alors si Y^* est la solution de P^*, et u une solution de P alors

$$u(x,Y^*(x,y)) = u(0,y)$$

De plus pour tout x fixé la fonction $Y^*_x : y \mapsto Y^*(x,y)$ est strictement croissante et pour toute fonction k, $k \circ Y_x^{*-1}$ est solution de P.

Preuve : Le début correspond à la proposition 5.1, la croissance de Y^*_x se montre ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Y^*_x}{\partial y}\right) = \frac{\partial \beta}{\partial y}(x,Y^*_x(x,y))\frac{\partial Y^*_x}{\partial y}$$

on en déduit que $\frac{\partial Y^*_x}{\partial y} = K(y)\exp\left(\int_0^x \frac{\partial \beta}{\partial y}(s,Y(s,y))ds\right)$ or $\frac{\partial Y_0}{\partial y} = 1$ donc K(y)=1 donc $\frac{\partial Y^*_x}{\partial y} > 0$.

Pour la fin ce n'est pas tout à fait évident, notons $f(x,y) = k(Y_x^{*-1}(y))$. On peut remarquer que $Y^*(x,Y_x^{*-1}(y)) = y$, et dériver cette égalité par rapport à x et à y, il reste alors à calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

5.5 EDP linéaires d'ordre deux

Définition 5.2 *Ce sont les EDP de la forme*

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + D\frac{\partial f}{\partial x} + E\frac{\partial f}{\partial y} = K(x,y,f)$$

où A,B,C,D,E et K sont des fonctions de x,y et f.

5.5.1 Exemples fondamentaux

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = h(x,y)$
   En intégrant une première fois par rapport à la variable x on obtient $\frac{\partial f}{\partial x} = \int^x h(x,y)\,\mathrm{d}x + K(y)$.
   Ce qui en intégrant une deuxième fois donne $f(x,y) = \int^x \int^x h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x + K(y)x + L(y)$ où K et L sont des fonctions quelconques. Réciproquement si l'on dérive deux fois la fonction définie par la formule précédente par rapport à x on obtient bien l'équation différentielle de départ.

   Exemple 5.6 Résoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = xy^2$.
   En intégrant une première fois on obtient :
   $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}x^2y^2 + C_1(y)$$
   En intégrant une seconde fois on obtient :
   $$f(x,y) = \frac{1}{6}x^3y^2 + C_1(y)x + C_2(y)$$

2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = h(x,y)$
   En intégrant une fois par rapport à x et une fois par rapport à y on obtient :
   $$f(x,y) = \int^x \int^y h(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + D(y) + C(x)$$
   où K et L sont des fonctions quelconques. La réciproque permet de conclure, les fonctions K et L doivent être dérivables sinon il faut faire attention à l'ordre de dérivation, (ce genre de problème sort de l'objectif de ce cours).

Proposition 5.2 *1. Si $K = 0$ les solutions $\mathcal{S}$ forment un espace vectoriel.*
2. Si K est une fonction de x et y uniquement, alors les solutions forment un espace affine de direction $\mathcal{S}$.

Preuve : triviale.

5.5.2 Cas des coefficients constants, sans second membre

Notons D_x l'opérateur de dérivation par rapport à la variable x, et D_y l'opérateur de dérivation par rapport à la variable y. On remarque que ces deux opérateurs commutent, car pour une fonction f deux fois différentiables on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Première méthode

on peut essayer d'écrire l'équation aux dérivées partielles à l'aide d'une opérateur différentiel et de factoriser cet opérateur pour se ramener à des EDP d'ordre 1.

Exemple 5.7 Résoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xy$
cette équation peut aussi s'écrire

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2})f = xy$$

où encore

$$(D_x^2 - D_y^2)f = xy$$

Or comme D_x et D_y commutent il est clair que

$$D_x^2 - D_y^2 = (D_x - D_y)(D_x + D_y)$$

l'équation s'écrit donc

$$(D_x - D_y)(D_x + D_y)f = xy$$

notons $g = (D_x + D_y)f$. Pour résoudre (E) : $(D_x - D_y)g = xy$ il suffit de faire un changement de variables, comme dans le paragraphe précédent. En posant

$$\begin{cases} X = x \\ Y = x + y \\ G(X,Y) = g(x,y) \end{cases}$$

(E) donne $\frac{\partial G}{\partial X} = X(Y - X) = XY - X^2$ ce qui en intégrant donne :

$$G(X,Y) = \frac{1}{2}X^2Y - \frac{1}{3}X^3 + C(Y)$$

en revenant aux variables de base on obtient $g(x,y) = \frac{1}{2}x^2(x+y) - \frac{1}{3}x^3 + C(x+y)$il nous reste donc à résoudre l'EDP

$$(D_x + D_y)f = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + C(x+y)$$

On fait un second changement de variables $\begin{cases} U = x \\ V = x - y \end{cases}$ qui nous ramène à l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial U} = \frac{2}{3}U^3 - \frac{1}{2}U^2V + C(2U - V)$$

qui s'intègre en

$$F = \frac{1}{6}U^4 - \frac{1}{6}U^3V + C_1(2U - V) + C_2(V)$$

ce qui donne en repassant dans les variables de base :

$$f = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^3(x - y) + C_1(x+y) + C_2(x-y) = \frac{1}{6}x^3y + C_1(x+y) + C_2(x-y)$$

un calcul immédiat montre que ces fonctions sont bien solutions de l'EDP. $\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = xy + C_1''(x+y) + C_2''(x-y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = C_1''(x+y) + C_2''(x-y) \end{cases}$

Deuxième méthode

Cette méthode est équivalente à la première lorsque il n'y a pas de dérivée partielle première dans l'EDP $(D = E = 0)$, on fait un unique changement de variable pour ne garder qu'une dérivée seconde croisée $(\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y})$

Exemple 5.8 on reprend l'exemple précédent : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xy$
On fait le changement de variables $\begin{cases} Z = ax + by \\ T = cx + dy \end{cases}$ et l'on pose $f(x,y) = F(Z,T)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} + 2ac\frac{\partial^2 F}{\partial Z \partial T} + c^2\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = b^2\frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} + 2bd\frac{\partial^2 F}{\partial Z \partial T} + d^2\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \end{cases}$$

L'équation donne donc

$$(a^2-b^2)\frac{\partial^2 F}{\partial Z^2}+2(ac-bd)\frac{\partial^2 F}{\partial Z\partial T}+(c^2-d^2)\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$$

si l'on choisit $a=b=1$ et $c=-d=1$ on n'a plus qu'une seule dérivées seconde.

Remarque 5.4 on pourrait avoir envie de prendre $a=b=c=d=1$ cela n'amène à rien car ce n'est pas un changement de variable, en effet on aurait alors $Z=T$ les calculs n'ont pas de sens

L'équation devient

$$4\frac{\partial^2 F}{\partial Z\partial T}=\frac{1}{2}(Z+T)\frac{1}{2}(Z-T)=\frac{1}{4}(Z^2-T^2)$$

que l'on intègre en

$$F=\frac{1}{48}(Z^3T-ZT^3)+C_1(T)+C_2(Z)$$

d'où en revenant aux variables de base :

$$f=\frac{1}{48}(x^2-y^2)\left((x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)\right)+C_1(x-y)+C_2(x+y)$$

$$f=\frac{1}{12}(x^3y-xy^3)+C_1(x-y)+C_2(x+y)$$

Remarque 5.5 On ne trouve pas les solutions que l'on avait trouvées lors de la résolution précédente, en fait c'est juste l'écriture qui change, en effet

$$\frac{1}{6}x^3y=\frac{1}{12}(x^3y-xy^3)+\frac{(x+y)^4-(x-y)^4}{96}$$

Remarque 5.6 Cette méthode est opérationnelle pour les équations de la forme

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=K(x,y,f)$$

lorsque le polynôme (dit caractéristique de l'équation) AX^2+BX+C possède deux racines réelles distinctes. Les autres cas sont bien plus difficiles à résoudre.

Troisième méthode : série de Fourier

cette méthode s'utilise entre autres lorsque le polynôme caractéristique ne possède pas de racine réelle, on se contentera d'un exemple : l'équation de la chaleur.

$$(E):\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$T(x,t)$ représente la température à l'instant t et au point d'abscisse x dans une barre de fer de longueur l. On se donne la condition initiale suivante :

$$(CI):T(x,0)=\phi(x)$$

on connaît la température de la barre en chacun de ses points à l'instant 0. Ainsi que des conditions aux limites :

$$(CL):T(0,t)=T(l,t)=0$$

la température de la barre à ses extrémités est nulle.

1. On cherche les solutions de (E) de la forme $T(x,t)=U(x)V(t)$.

2. On ne conserve que les solutions, non nulles, bornées lorsque t croit vers l'infini.
3. On regarde ce que les conditions aux bords (CI) imposent comme conditions aux constantes d'intégrations.
4. On cherche une solution du problème sous forme de somme de solutions trouvées précédemment, en écrivant la condition initiale (CI) à l'aide d'une série de Fourier.

1. (E) équivaut à l'équation $UV' = a^2U''V$ qui s'écrit encore
$$\frac{V'}{V} = a^2\frac{U''}{U}$$
Le membre de gauche de l'égalité est une fonction de t et le membre de droite est une fonction de x, chacune des parties est donc une constante que je note K. On s'est ramené au système
$$\begin{cases} V' = a^2KV \\ U'' = KU \end{cases}$$
qui se résout facilement suivant le signe de K.
$$\begin{cases} V = Ce^{Kt} \\ U = C_1e^{\sqrt{K}ax} + C_2e^{-\sqrt{K}ax} \text{ ou } U = C_1\cos(\frac{\sqrt{-K}}{a}x) + C_2\sin(\frac{-\sqrt{-K}}{a}x) \end{cases}$$
2. V doit être borné lorsque t tend vers l'infini, K est donc négatif, notons $K = -k^2$. Les solutions sont donc:
$$\begin{cases} V = Ce^{-k^2t} \\ U = C_1\cos(\frac{kx}{a}) + C_2\sin(\frac{kx}{a}) \end{cases}$$
3. $T(0,t) = U(0)V(t) = Ce^{-k^2t}C_1$, si C est nulle on a la solution nulle donc $C \neq 0$ et $C_1 = 0$.
$T(l,t) = U(l)V(t) = Ce^{kt}C_2\sin(\frac{kl}{a})$, si $C_2 = 0$ on a la solution nulle donc $\sin(\frac{kl}{a})$ doit être nul, il faut donc que
$$k = \frac{\pi na}{l}$$
avec n un entier. On a donc des solutions de la forme
$$T(x,t) = Ce^{-\frac{\pi^2n^2a^2a}{l^2}}\sin(\frac{\pi nx}{l})$$
4. On cherche une solution au problème global de la forme :
$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_ne^{-\frac{\pi^2n^2a^2t}{l^2}}\sin(\frac{\pi nx}{l})$$
Les conditions aux bords (CB) sont clairement vérifiées. Écrivons la condition initiale (CI) à l'aide pour la fonction ψ. On obtient
$$\psi(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\sin(\frac{\pi nx}{l})$$
comme on peut choisir les C_n, il suffit de les choisir de tel sorte que $\sum_{n=0}^{\infty} C_n\sin(\frac{\pi nx}{l}) = \Phi(x)$.
Soit $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(\frac{\pi nx}{l})$ la série de Fourier de la fonction, $2l$ périodique, impaire, égale à ϕ sur $[0,l]$ et posons :
$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_ne^{-\frac{\pi^2n^2ta^2}{l^2}}\sin(\frac{\pi nx}{l})$$
On a donc $\psi(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\sin(\frac{2\pi nx}{l}) = \phi(x)$ (D'après le théorème de Dirichlet) . Enfin on admet que la condition (E) est vérifiée par ψ, voir le cours sur les séries de fonctions (ceci est un peu long à faire).

On a résolu dans un cas particulier l'équation de la chaleur.

Chapitre 6

Exercices

Équations différentielles linéaires

Exercice 1 : *Résoudre les équations différentielles suivantes:*

1. $y' - 6y = 0$
2. $y' + 3y = 2$ *avec la condition supplémentaire y(0)=1;*
3. $y' + xy = 2x$
4. $3y' - y = e^x$
5. $y' + 6y = 2x + 1$
6. $(1 + x^3)y' - x^2y = 0$
7. $xy' - 2y = x^3 \arctan(x)$
8. $(1 + x^2)y' + xy = 1 + 2x^2$
9. $xy' - 2y + x\ln(x) = 0$
10. $\sqrt{1-x^2}y' - y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(1 + x^2)y' = 2xy$
12. $y'' - y' - 6y = 0$ *avec les conditions* $y(0) = 1$ *et y'(0)=0*
13. $y'' - 6y' + 9y = e^x$
14. $y'' - 4y' + 3y = e^{mx}$ *on discutera selon les valeurs de m.*
15. $y'' + y' + 4y = 0$
16. $y'' + 2y' + 3y = x + e^{3x}$
17. $2y'' + y' + 2y = x^2 - 1$
18. $y'' + 4y' + 4y = x^2e^{-2x}$
19. $y'' + y = \frac{1}{\sin(x)}$
20. $yy' + y^2 = \frac{1}{2}e^{2x}$
21. $y'' + y' = x - 1$
22. $y'' + y - 2y = (x - 1)e^x$

Exercice 2 : *Soit* (E_0) *l'équation différentielle* $xy' = 3y$ *et* $(E_1) : xy' - 3y = 2x + 3$

1. *Résoudre* (E_0) *sur* $]-\infty,0[$ *et sur* $]0, +\infty[$.
2. (E_0) *admet-elle des solutions sur* $\mathbb{R}$ *Si oui lesquelles?*
3. *Résoudre* (E_1) *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : *Résoudre en se ramenant à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 l'équation intégrale:* $y(x) = x^4 + \int_0^x xty(t)\,dt$

Exercice 4 : *Résoudre les équations différentielles suivantes:*

1. $y''' + 2y'' - 3y' + y = 2$

2. $y'''' - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^{2x}$
3. $y''' - y = e^x$
4. $y'''' + 2y''' + 7y'' + 6y' + 9y = x$ *On pourra utiliser le fait que:* $(X^2 + X + 3)^2 = (X^4 + 2X^3 + 7X^2 + 6X + 9)$
5. $2y'''' + 2y''' - y'' - 2y' - y = 0$ *avec la condition supplémentaire que* y *tende vers* $+\infty$ *lorsque* x *tend vers* ∞.
6. $y^{(6)} - y' = x^2$

Équations différentielles d'ordre 1

Exercice 5 : *Résoudre les équations différentielles suivantes:*

1. $y' + e^{x-y} = 0$
2. $xy\,dy = (y+1)(1-x)\,dx$
3. $xy + (1+x^2)y' = 0$ *avec la condition* $y(1) = 1$
4. $y' = (y-4x)^2$ *on pourra faire un changement de fonction inconnue en posant* $v = y - 4x$.
5. $(y^2 + xy) - x^2 y' = 0$ *on pourra faire un changement de fonction inconnue en posant* $v = \frac{y}{x}$.
6. $(3ye^{3x} - 2x)\,dx + e^{3x}\,dy = 0$ *différentielle exacte*
7. $(2x^3 + 3y) + (3x + y - 1)y' = 0$ *différentielle exacte*
8. $(x^2 + y^2 + x)\,dx + xy\,dy = 0$ *facteur intégrant* x
9. $x\,dx + y\,dy + 4y^3(x^2 + y^2)\,dy = 0$ *facteur intégrant* $\frac{1}{x^2+y^2}$

Exercice 6 : *Déterminer les isoclines* I_0, I_1, I_2, *et* I_{-1} *de l'équation* $y' = x + y^2$.

Mise en équations différentielles

Exercice 7 : *Selon la loi de Newton, la vitesse de refroidissement d'un corps dans un courant d'air est proportionnel à la différence de température entre le corps et l'air. Si la température de l'air est 20°C, et que le corps passe de 100°C à 70°C en 5 minutes, au bout de combien de temps se trouvera-t-il à 30°C ?*

Exercice 8 : *La vitesse de dissolution d'une substance dans de l'eau est proportionnelle au produit de deux grandeurs : d'une part la quantité de produit non encore dissoute d'autre part la différence entre la concentration à l'instant considéré et la concentration d'une solution saturée. On sait que dans 100g de solution saturée il y a 10g de substance dissoute. On place 50g de produit dans un litre d'eau et on remarque qu'il faut 10 minutes pour dissoudre les dix premiers grammes, quelle quantité de produit se dissout en 50 minutes.*

Exercice 9 : *Un réservoir de 500 litres est rempli d'eau salée de concentration 10gl*$^-1$. *De l'eau douce coule dans le réservoir à raison de 5 litres par minute, et la solution brassée de façon uniforme s'écoule en quantité égale. Quelle est la concentration en sel au bout d'une heure ? Quelle serais cette concentration si on avait commencé par vider 300 litre et que l'on avait laissé couler l'eau douce pendant une heure pour remplir le réservoir ?*

Exercice 10 : *Un réservoir cylindrique de 250 cm de rayon et 350 cm de hauteur se vide à travers un trou circulaire situé dans sa partie inférieure. On admet que la vitesse de l'eau à la sortie est proportionnelle à la racine carrée de la hauteur d'eau restante. Si il faut 30 minute pour que se vide 2 m*^{3}, *combien faut-il attendre pour qu'il ne reste qu'un m*^{3} *?*

Exercice 11 : *Pour l'équation* $(E) : y' = 1 + y^2$ *comparer* $\phi(1)$ *où* ϕ *est la solution de* (E) *sur [0;1] vérifiant* $\phi(0) = 0$ *et la valeur approchée de* $\phi(1)$ *par la méthode de Newton. Avec par exemple* $n = 4$.

Système différentiel

Exercice 12 : *Résoudre les systèmes différentiels suivants, en diagonalisant certaines matrices:*

1. $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = 6x - y \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = -5x + 4y \\ y' = -6x + 5y \end{cases}$ *avec* $x(0) = 0$ *et* $y(0) = 1$
3. $\begin{cases} x' = 4x - y + e^{5t} \\ y' = 6x - y \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' - 4x + 3y = t \\ y' - 2x + y = t + 1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' - y' = x - y \\ 2x' - y' = -8x + 7y \end{cases}$
6. $\begin{cases} x' = 5x + 4y - 10z \\ y' = 2x + 3y - 5z \\ z' = 2x + 2y - 4z \end{cases}$
7. $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = z + x \\ z' = x + y \end{cases}$
8. $\begin{cases} 5x' - 8y' = x \\ 3x' - 5y' = y \end{cases}$
9. $\begin{cases} x' = 3x - y + t \\ y' = 4x - y - e^t \end{cases}$

Exercice 13 : *Résoudre le système différentiel suivant, en diagonalisant une matrice, on pourra écrire le système à l'aide d'un système de 4 équations à 4 inconnues.* $\begin{cases} x'' = m^2 y \\ y'' = m^2 x \end{cases}$ m *est un réel strictement positif.*

Exercice 14 : *Résoudre les systèmes différentiels suivants, en utilisant l'opérateur* D*:*

1. $\begin{cases} x' - y' - y = -e^t \\ x + y' - y = e^{2t} \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x' - 6y' + x = 1 \\ 3x' - 5y' + y = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x'' + 4x - 3y' = 0 \\ 3x' + y'' + 4y = 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x'' - 2x - 3y = e^{2t} \\ y'' + x + 2y = 0 \\ x(0) = y(0) = 1 \\ x'(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 15 : *Résoudre de deux manières différentes le système :*

$$\begin{cases} x' + 2y' + x - 10y = t \\ 3x' + 5y' + 2x - 26y = 0 \end{cases}$$

EDP

Exercice 16 : *Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes:*

1. $$\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
2. $$5\frac{\partial f}{\partial x} - 6\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
3. $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 3y$$
4. $$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y$$
5. $$\frac{\partial f}{\partial x} + 5\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x + y)$$
6. $$\frac{\partial f}{\partial y} = f$$

7.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = f$$

8.

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = yf$$

9.

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^2}{x}$$

On pourra poser $\left\{ \begin{array}{l} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{array} \right.$

10.

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = xy^2$$

On pourra poser $\left\{ \begin{array}{l} u = x \\ v = yx \end{array} \right.$

11.

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

On pourra faire un changement de variable polaire

12.

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} + 4\frac{\partial f}{\partial z} = z$$

Exercice 17 : *Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :*

1. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + xy^2 \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ f(0,y) = y^2 \end{cases}$
2. $\frac{\partial f}{\partial x} + (x+2y)\frac{\partial f}{\partial y} = x$

Exercice 18 : *Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes:*

1. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$
2. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - 6\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xy$$
3. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \cos(x)$$
4. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
5. $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 3\frac{\partial f}{\partial x} + 5\frac{\partial f}{\partial y} - 6f = 12$$

Exercice 19 :

1. *Montrer que l'équation de Laplace* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ *s'écrit en coordonnées polaires :*
$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0$$
2. *On cherche les solutions de l'équation de Laplace telles que* $F(r,\theta) = H(r)G(\theta)$ *avec* $\lim_{r\to\infty} F(r,\theta) = 0$ *et* $F(r,\theta + 2\pi) = F(r,\theta)$
   (a) *Séparer les variable dans l'équation de Laplace pour ce ramener à deux équations l'une en* r*, l'autre en* θ*.*
   (b) *Résoudre l'équation différentielle en* G*.*
   (c) *Résoudre l'équation différentielle en* H*. On pourra commencer par chercher des solutions de la forme* $H(r) = r^\alpha$*.*
   (d) *Conclure.*
3. *Déterminer une solution* ϕ*, sous forme de série de Fourier, de l'équation de Laplace qui tend vers 0 en* $+\infty$ *et qui soit égale en tout point du cercle unité à l'argument de ce point. Id est* $h(\cos(\theta), \sin(\theta)) = \theta$ *pour tout* θ *dans* $]0,2\pi[$*.*

Exercice 20 : U_1,U_2 *et* U_3 *des fonctions de trois variables et* $U = (U_1,U_2,U_3)$ *on note* $\nabla U = (\nabla U_1, \nabla U_2, \nabla U_3)$ *et soit* f *une fonction de trois variables à valeurs dans l'ensemble des matrices* 3×3*.*

1. *Résoudre l'équation*
$$(E') : \nabla U + (\nabla U)^t = 0$$
.
2. *Soit* H_1 *une solution de* $(E) : \nabla U + (\nabla U)^t = 2f$*, montrer que l'ensemble des solutions de* (E) *est* $\{H_1 + H \mid H$ *solution de* $(E')\}$
3. *Résoudre* (E) *pour la fonction* f *définie par* $f_{11} = f_{22} = f_{33} = 2$ *sinon* $f_{ij} = (x_i^2 + x_j^2)$*.*
4. *On suppose maintenant que* (E) *admet une solution montrer que* $f_{ij} = f_{ji}$*.*
5. *On suppose que* (E) *possède une solution, montrer que l'on a :*
$$2\frac{\partial^2 f_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f22}{\partial x_1^2}$$

écrire deux autres équations du même type.

6. *Pour* $f = \begin{pmatrix} x_1x_2 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_1^2 & x_3 \end{pmatrix}$ (E) *possède-t-elle des solutions ?*

Index