
CHAPITRE 2

SÉRIES ENTIÈRES

2.1 Séries entières

Définition 2.1.1 On appelle série entière toute série de fonctions $(\sum f_n)$ dont le terme général est de la forme $f_n(x) = a_n x^n$, où $(a_n)_n$ désigne une suite réelle ou complexe et $x \in \mathbb{R}$.

Une série entière est notée $(\sum a_n x^n)$. Comme pour les séries de fonctions, on cherche l'ensemble ;

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge} \right\}.$$

C'est le domaine de convergence de la série entière.

Exemple 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ et appliquons le critère de D'Alembert ;

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0$. La série entière est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$; donc $\Delta = \mathbb{R}$.

Exemple 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$ on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 x \right| = |x|$.

Si $|x| < 1$, la série est absolument convergente et si $|x| > 1$ la série diverge.

Etudions le cas où $|x| = 1$.

on a $|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est alors absolument convergente dans $[-1, 1]$;

et alors $\Delta = [-1, 1]$

Exemple 3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n.$$

Cette série ne converge que si $x = 0$ car $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(n+1)x|$ et la limite n'existe que si $x = 0$: d'où : $\Delta = \{0\}$.

Exemple 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{n}{n+1} \right) x \right| = |x|$. Si $|x| < 1$, la série est absolument convergente et si $|x| > 1$ la série diverge.

Etudions le cas où $|x| = 1$.

$x = 1$: c'est la série harmonique $\left(\sum \frac{1}{n} \right)$, elle est divergente.

$x = -1$: c'est la série harmonique alternée $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n} \right)$, elle est convergente.

D'où : $\Delta = [-1, 1[$.

Lemme 2.1.1 (Lemme d'Abel)

Soit $\left(\sum a_n x^n \right)$ une série entière. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(a_n x_0^n)$ soit bornée. Alors :

1. La série $\left(\sum a_n x^n \right)$ est absolument convergente pour $|x| < |x_0|$.
2. La série $\left(\sum a_n x^n \right)$ est normalement convergente pour $|x| < r$, et pour tout r tel que $0 < r < |x_0|$.

Preuve.

La suite $(a_n x_0^n)$ est bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n x_0^n| \leq M$.

1.) Pour $|x| < |x_0|$:

$|a_n x^n| = \left| \frac{a_n x_0^n x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ est une série géométrique

de raison $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$, donc convergente. D'après le théorème de comparaison, la série

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ est convergente et par conséquent la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolument pour $|x| < |x_0|$.

2.) Soit $0 < r < |x_0|$ et soit $|x| \leq r$.

$|a_n x^n| = \left| \frac{a_n x_0^n x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{r}{x_0} \right|^n$. Comme $\sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{r}{x_0} \right)^n$ est une série numérique

convergente, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est normalement convergente pour tout x tel que $|x| < r$ et tout r tel que $0 < r < |x_0|$.

2.2 Rayon de convergence d'une série entière

Pour les séries entières, la notion de convergence prend une forme assez simple.

Théorème 2.2.1

Soit $(\sum a_n x^n)$ une série entière ; alors il existe un unique nombre réel $R \geq 0$ (éventuellement infini) tel que :

1. $(\sum a_n x^n)$ converge absolument dans $] -R, R[$.
2. $(\sum a_n x^n)$ diverge si $|x| > R$.

Preuve.

Soit $I = \left\{ r \in \mathbb{R}^+ : \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ converge} \right\} \subset \mathbb{R}^+ . I \neq \emptyset \text{ car } 0 \in I .$

On distinguera trois cas : $I = \{0\}$, $I = \mathbb{R}^+$ et $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}^+ .$

1) $I = \{0\}$. On pose $R = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^* .$ Ceci implique que $|x| > 0$ et par suite $x \notin I$ et la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ diverge.

Montrons que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge. Pour cela, on raisonnera par l'absurde. Supposons que

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pour $|x| > 0$.

Soit $x_1 \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |x_1| < |x|$. La série $\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n| \right)$ est convergente d'après le lemme d'Abel (2.1.1) et donc $x_1 \in I$. D'où la contradiction avec le fait que $I = \{0\}$.

2) $I = \mathbb{R}^+ .$ On pose $R = \infty$. On doit prouver que $(\sum a_n x^n)$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge pour tout $r > 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^* .$ Il existe $r > 0$ tel que $|x| < r$. Ceci implique $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$ et d'après le théorème de comparaison la série $(\sum a_n x^n)$ converge absolument.

3) $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}^+ , I \neq \{0\}$ et $I \neq \mathbb{R}^+ .$

a) I est majoré. En effet, soit $r \in \mathbb{R}^+ \setminus I$ et supposons que r n'est pas un majorant de I . Il existerait alors $r_1 \in I$ tel $r < r_1$. D'après la définition de I , la série $(\sum |a_n| r_1^n)$ est convergente ainsi que $(\sum |a_n| r^n)$ (car $|a_n| r^n < |a_n| r_1^n$) et donc $r \in I$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $r \in \mathbb{R}^+ \setminus I$. I est alors un ensemble non vide et majoré donc admet une borne supérieure $R = \sup_{r \in I} r$. Pour conclure, on doit prouver que

$(\sum a_n x^n)$ converge absolument pour tout x , $|x| < R$ et diverge pour tout x , $|x| > R$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$. Il existe $\rho \in I$ tel que $|x| < \rho < R$. Comme la série $(\sum |a_n| \rho^n)$ converge, $(\sum |a_n| \cdot |x|^n)$ converge en vertu du théorème de comparaison. $(\sum a_n x^n)$ est alors absolument convergente.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $|x| > R$. Ceci implique que $|x| \notin I$ et donc la série $(\sum |a_n x^n|)$ diverge.

Montrons que $(\sum a_n x^n)$ diverge. Pour cela, on raisonne par l'absurde. Si $(\sum a_n x^n)$ converge, d'après le lemme d'Abel, (2.1.1) la série $(\sum a_n x_1^n)$ est absolument convergente pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, vérifiant $R < |x_1| < |x|$ et donc $|x_1| \in I$. On a alors nécessairement $|x_1| \leq R = \sup_{r \in I} r$ et ceci est en contradiction avec l'hypothèse $R < |x_1| < |x|$.

Définition 2.2.1 Le nombre $R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ : \left(\sum |a_n| r^n \right) \text{ converge} \right\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est appelé rayon de convergence de la série $(\sum a_n x^n)$.

Remarque 2.2.1 Le rayon de convergence d'une série $(\sum a_n x^n)$ est caractérisé par :

1. $|x| < R \implies (\sum a_n x^n)$ est absolument convergente.
2. $|x| > R \implies (\sum a_n x^n)$ diverge.
3. $|x| = R$ est le cas douteux où on ne peut rien dire sur la nature de la série.
4. Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $r < R$, la série $(\sum a_n x^n)$ est normalement (donc absolument) convergente pour $|x| \leq r$.

2.2.1 Détermination du rayon de convergence

Lemme 2.2.1 (Lemme d'Hadamard)

Soit $(\sum a_n x^n)$ une série entière. Le rayon de convergence R est donné par la relation :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Preuve.

a) Posons $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. En utilisant le critère de d'Alembert on a :

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = \ell |x|$. Ceci implique :

- $\alpha) \left(\ell |x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{\ell} \right) \implies$ la série est absolument convergente
- $\beta) \left(\ell |x| > 1 \iff |x| > \frac{1}{\ell} \right) \implies$ la série est divergente

D'après la remarque (2.2.1), $R = \frac{1}{\ell}$.

b) Posons $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. En utilisant le critère de Cauchy :

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \ell |x|$ puis on adopte le même raisonnement que précédemment, on aboutit à la même conclusion ; $R = \frac{1}{\ell}$.

Exemple 2.2.1

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

On a $a_n = \frac{1}{n!}$, utilisons le critère de D'Alembert :

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0$, donc le rayon de convergence est $R = \infty$. La série est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right|^2 = 1$. Le rayon de convergence est $R = 1$. La série est absolument convergente pour tout $|x| < 1$ et divergente si $|x| > 1$.

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}.$$

Le critère de Cauchy donne :

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}$, le rayon de convergence est $R = 2$. La série est absolument convergente pour tout $|x| < 2$ et divergente si $|x| > 2$.

Remarque 2.2.2 Soit ϕ une application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , la série suivante $\left(\sum a_n x^{\phi(n)} \right)$ est une série entière. On commence par calculer directement la limite suivante ;

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{\phi(n+1)}}{a_n x^{\phi(n)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} |x|^{\phi(n+1) - \phi(n)}$$

puis chercher le domaine de x où $\ell < 1$; R est donc $\sup \{ \ell \in \overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \}$, où notre série converge.

Exemple : Trouver le rayon de convergence de la série : $\left(\sum 3^n x^{2n+5} \right)$.

Dans notre cas $\phi(n) = 2n + 5$,

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1} x^{2n+7}}{3^n x^{2n+5}} \right| = 3|x|^2.$$

La série converge si $3|x|^2 < 1 \iff |x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ d'où le rayon de convergence est : $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

La série est absolument convergente pour tout $|x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ et divergente si $|x| > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.3 Propriétés

Ce paragraphe étudie les propriétés de continuité, de dérivabilité et d'intégrabilité de la fonction somme des séries entières.

2.3.1 Continuité d'une série entière

Proposition 2.3.1

Soit $(\sum a_n x^n)$ une série entière de rayon de convergence R et soit $f :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, f est alors continue.

Preuve.

Soit $0 < r < R$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n(x) = a_n x^n$ sont continues dans $[-R, R]$ et puisque la convergence est normale donc uniforme dans $[-r, r]$, f est alors continue dans $[-r, r]$ pour tout r , $0 < r < R$. Elle est donc continue dans $] - R, R[$.

2.3.2 Dérivée d'une série entière

Définition 2.3.1 Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe. On la note $f'(x_0)$.

Définition 2.3.2 Une fonction f est dite de classe C^n sur un intervalle I de \mathbb{R} , si sa dérivée d'ordre n est une fonction continue sur I . On notera alors que $f \in C^n(I)$.

Si elle est indéfiniment (ou infiniment) dérivable, on dira alors qu'elle est de classe C -infinie et on écrira que $f \in C^\infty(I)$.

Par contre $f \in C^0(I)$, signifie que f est seulement continue sur I .

Proposition 2.3.2

Soit $(\sum a_n x^n)$ une série entière de rayon de convergence R , et soit $f :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Alors f est dérivable et on a $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Preuve.

Soient les fonctions $S_n :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ définies par $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Ces fonctions possèdent les propriétés suivantes :

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$ et la convergence est absolue donc simple.

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, S_n est dérivable et on a $S'_n(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$.

iii) Le rayon de convergence de $(\sum n a_n x^{n-1})$ est R car $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)a_{n+1}}{n a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}$.

La suite $(S'_n)_n$ est uniformément convergente dans $[-r, r]$.

f est dérivable et on a $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x \in [-r, r]$ et $\forall r \in]0, R[$.

Donc $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \forall x \in]-R, R[$.

Corollaire 2.3.1

Soit la série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence R ; f est indéfiniment dérivable ($f \in C^\infty(]-R, R[)$); et l'on a :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Preuve.

En effet, si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, par application de la proposition précédente on a,

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, et par récurrence, la dérivée d'ordre k est donnée par la relation :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

De cette expression, il résulte que $f^{(k)}(0) = a_k k!$; c'est-à-dire que $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

2.3.3 Primitive d'une série entière

Définition 2.3.3

Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ admet une primitive s'il existe une fonction $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $F' = f$; (D étant le domaine de définition de f).

Proposition 2.3.3

Soit $\left(\sum a_n x^n\right)$ une série entière de rayon de convergence R et soit $f :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On considère la fonction $F :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$. Alors $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in]-R, R[$.

Preuve.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est R car $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{n+2} \frac{n+1}{a_n} \right| =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}$. D'après le théorème précédent on conclut que $F' = f$.

2.3.4 Opérations sur les séries entières

Proposition 2.3.4

Soit $(\sum a_n x^n), (\sum b_n x^n)$ deux séries entières ayant respectivement R et R' pour rayon de convergence.

1. Si $R \neq R'$, le rayon de convergence R'' de la série entière $(\sum (a_n + b_n)x^n)$ est $R'' = \min\{R, R'\}$.
2. Si $R = R'$ le rayon de convergence de la série entière $(\sum (a_n + b_n)x^n)$ est $R'' \geq R$.

Preuve.

1) Supposons que $R' < R$.

i) $|x| < R' \implies |x| < R$. Les deux séries $(\sum a_n x^n)$ et $(\sum b_n x^n)$ sont absolument convergentes. Comme $|(a_n + b_n)x^n| \leq |a_n x^n| + |b_n x^n|$, il en découle que $\sum ((a_n + b_n)x^n)$ converge absolument pour $|x| < R' = \min\{R, R'\}$.

ii) Si $|x| > R'$, deux cas de figure se présentent :

a) Si $R' < |x| < R$, la série $(\sum b_n x^n)$ converge absolument et $(\sum a_n x^n)$ diverge.

Donc $(\sum (a_n + b_n)x^n)$ diverge.

b) Si $R' < R < |x|$, les deux séries divergent. Montrons $(\sum (a_n + b_n)x^n)$ diverge.

Raisonnons par l'absurde. Si $(\sum (a_n + b_n)x^n)$ converge alors d'après le lemme d'Abel (2.1.1), la série $(\sum (a_n + b_n)x^n)$ converge absolument pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $|x_0| < |x|$ et en particulier pour x_0 vérifiant $R' < |x_0| < R < |x|$. D'où la contradiction.

2) Si $R = R'$. Il est clair que la série converge absolument si $|x| < R = R'$. Le rayon de convergence $R'' \geq R = R'$.

Exemple 2.3.1 Soient les deux séries $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{2^n} x^n$. Les deux séries

ont pour rayon de convergence $R = 1$. Par contre la série somme $(f + g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$, a pour rayon de convergence $R'' = 2$.

2.4 Séries de Taylor

Problème

Soit f une fonction réelle à variable réelle x . Peut-on trouver une suite réelle (a_n) et

$r > 0$ tels que l'on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \forall x \in]-r, r[$?

Si ce problème admet une solution, on dit que f est développable en série entière au voisinage de 0.

On peut généraliser cette situation en se posant la même question pour une fonction définie au voisinage d'un point x_0 :

Existe-il une suite (a_n) et $r > 0$ tels que l'on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, $\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[$?

Dans l'affirmatif, on dira que f est développable en série entière au voisinage de x_0 .

Proposition 2.4.1

Pour qu'une fonction f soit développable en série entière au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, il est nécessaire qu'elle soit de classe C^∞ dans un voisinage $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ de x_0 et dans ce cas on a : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$.

Preuve.

Il suffit de remarquer que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, alors et d'après le corollaire (2.3.1)

$$\text{on a } a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Proposition 2.4.2

Soit $f :]-r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ dans un voisinage de 0. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in]-r, r[$, $|f^{(n)}(x)| \leq M$. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est simplement convergente dans $] - r, r[$ et on a : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \forall x \in]-r, r[$.

Preuve.

Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-r, r[$, on a $|f^{(k)}(x)| \leq M$. Le développement de Taylor de f au voisinage de 0 à l'ordre n donne :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$.

En effet,

$$x \in]-r, r[\implies |x| < r \implies |\theta x| < r \implies |f^{(n+1)}(\theta x)| \leq M;$$

$$\text{et donc } \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{Mr^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Or la série de terme général $u_n = \frac{Mr^{n+1}}{(n+1)!}$ est convergente car ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n+1} = 0 \text{ et par suite } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0,$$

$$\text{ce qui donne } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Remarque 2.4.1 Il suffit de vérifier que le reste de Taylor, souvent appelé reste de Mac-Laurin, tend vers 0.

$$\text{C'est à dire que } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0,$$

Exemple 2.4.1

1) **La fonction exponentielle** : $f(x) = e^x$.

Cette fonction est indéfiniment dérivable dans \mathbb{R} , et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x$. Le reste de Mac-Laurin est : $\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$. On vérifie comme précédemment, que cette limite tend vers zéro quand n tend vers ∞ ; et ceci quelque soit x dans \mathbb{R} .

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2) **Les fonctions hyperboliques** :

Les fonctions cosinus-hyperboliques et sinus-hyperboliques ont même rayon de convergence que la fonction exponentielle, c'est à dire $R = \infty$.

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3) **Les fonctions circulaires** :

a) La fonction sinus :

$$\begin{aligned} f(x) = \sin x &\implies f(0) = 0, & \text{et } \forall p \in \mathbb{N} \quad f^{(4p)}(x) = \sin x &\implies f^{(4p)}(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x &\implies f'(0) = 1, & \text{et } \forall p \in \mathbb{N} \quad f^{(4p+1)}(x) = \cos x &\implies f^{(4p+1)}(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x &\implies f''(0) = 0, & \text{et } \forall p \in \mathbb{N} \quad f^{(4p+2)}(x) = -\sin x &\implies f^{(4p+2)}(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x &\implies f'''(0) = -1, & \text{et } \forall p \in \mathbb{N} \quad f^{(4p+3)}(x) = -\cos x &\implies f^{(4p+3)}(0) = -1 \end{aligned}$$

Les dérivées d'ordre quelconques sont majorées par 1, et ceci quelque soit x dans \mathbb{R} .

On a alors :

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{et } R = \infty.$$

b) La fonction cosinus :

$$f(x) = \cos x = (\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \text{et } R = \infty.$$

4) **La série du binôme**

Considérons la fonction $x \longrightarrow f(x) = y = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Son domaine de définition est $] -1, \infty[$.

On a une relation simple entre la fonction f et sa dérivée.

$y = (1+x)^\alpha$, on a $y' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ d'où l'équation différentielle :

$$y'(1+x) = \alpha y \tag{2.1}$$

Toutes les solutions de cette équation sont de la forme $y = C(1+x)^\alpha$, où C est une constante arbitraire. Cherchons maintenant s'il existe une fonction f développable en

série entière au voisinage de 0, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ qui est solution de (2.1). Pour qu'une telle fonction existe, il est nécessaire d'avoir les relations :

$$0 = (1+x)f'(x) - \alpha f(x) = (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} - (\alpha-n)a_n] x^n.$$

On déduit alors que $(n+1)a_{n+1} - (\alpha-n)a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $(n+1)a_{n+1} = (\alpha-n)a_n$ car une série entière est nulle si et seulement tous ses coefficients sont nuls. Ceci permet d'avoir :

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha a_0 \\ a_2 &= \frac{(\alpha-1)a_1}{2} \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= \frac{(\alpha-n+2)a_{n-2}}{n-1} \\ a_n &= \frac{(\alpha-n+1)a_{n-1}}{n} \end{aligned}$$

. Ceci donne enfin

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} a_0$$

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$. Le rayon de convergence R est donné par la relation :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| = 1.$$

Par construction, la série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} a_0 x^n$ est solution de l'équation différentielle (2.1), elle est donc de la forme $f(x) = C(1+x)^\alpha$. Puisque $f(0) = a_0 = C = 1$, on déduit que pour $x \in]-1, 1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n; \quad R = 1.$$

Cette série est connue sous le nom de série du binôme.

Remarque 2.4.2 Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors les dérivées d'ordre $n+1$ et plus de $(1+x)^n$ sont toutes nulles. La série du binôme se réduit à un polynôme de degré n , et on retrouve la formule du binôme de Newton.

Exercices d'applications.

En utilisant le résultat ci-dessus, montrer qu'on a les développements suivants. Donner le domaine de convergence de ces séries.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{1+x} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1.3\dots(2n-3)}{2.4\dots 2n} x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots \\ \text{b) } \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots 2n} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \dots \end{aligned}$$

Remarque 2.4.3

Un développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction f peut s'obtenir

grâce au développement de sa dérivée f' . Par exemple, le développement en série entière des fonctions $\arcsin x$ s'obtient facilement en remarquant que :

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \dots$$

Sachant que $\arcsin 0 = 0$,

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \dots$$

Par ce procédé, il est facile par exemple de développer les fonctions $x \rightarrow \arccos x$, $x \rightarrow \operatorname{Argsh} x$, $x \rightarrow \operatorname{Arctg} x$ et $x \rightarrow \operatorname{Argth} x$.

Attention : la fonction $x \rightarrow \operatorname{Argth} x$ n'est pas définie dans un voisinage de zéro, son domaine de définition est $[1, \infty[$.

5) **La fonction** $x \rightarrow \frac{1}{1-x}$.

On remarque d'une part que pour $|x| < 1$, $\lim |x|^n = 0$ et d'autre part

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

D'où :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ avec } R = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, (R = 1).$$

6) **La fonction** $x \rightarrow \operatorname{Log}(1+x)$.

Certains développements en série s'obtiennent au moyen des théorèmes sur l'intégration et la dérivation des séries entières.

Du développement $\frac{1}{1+x}$ on déduit par intégration :

$$\operatorname{Log}(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, (R = 1). \text{ La constante d'intégration est nulle car } \operatorname{Log} 1 = 0.$$

$$\text{On a de même } \operatorname{Log}(1-x) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, (R = 1).$$

On remarque que ces fonctions sont définies aussi pour des valeurs n'appartenant pas à l'intervalle ouvert $] -1, 1[$ mais leurs développements en série de Taylor au voisinage de 0 ne sont convergents que pour $|x| < 1$.

Formule très utile, donc à retenir :

$$\forall x \in [-1, 1[: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\operatorname{Log}(1-x), \quad \underline{R=1}.$$

2.4.1 Développement en série entière au voisinage d'un point x_0

Soit $x \rightarrow f(x)$ une fonction définie au voisinage d'un point x_0 et posons $X = x - x_0$.

Définition 2.4.1 On dit que f est développable en série entière au voisinage de x_0 si la fonction $X \rightarrow f(X + x_0)$ est développable en série entière au voisinage de 0. On aura alors :

$$f(X + x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \text{ pour } |X| < R.$$

Donc $f(x) = f(X + x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ pour tout x vérifiant $|x - x_0| < R$

Exemple 2.4.2 On cherche le développement en série entière de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de $x_0 = 3$. On pose $X = x - 3$ et on obtient :

$$\sqrt{x} = \sqrt{X + 3} = \sqrt{3 \left(1 + \frac{X}{3}\right)} = \sqrt{3} \left(1 + \frac{X}{3}\right)^{1/2} = \sqrt{3} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1.3 \dots (2n-3)}{2.4 \dots 2n} \left(\frac{X}{3}\right)^n\right)$$

$$\text{Finalement : } \sqrt{x} = \sqrt{3} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} \cdot \frac{1.3 \dots (2n-3)}{2.4 \dots 2n} (x-3)^n\right).$$

Domaine de convergence de cette série. Puisque la série entière en $\frac{X}{3}$ a pour rayon de convergence $R = 1$, ce qui veut dire que pour

$$\left|\frac{X}{3}\right| < 1 \iff -3 < X < 3 \iff -3 < x - 3 < 3 \iff 0 < x < 6,$$

la série est absolument convergente.

$$\text{Pour } x = 0, \text{ on a : } \sqrt{3} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} \cdot \frac{1.3 \dots (2n-3)}{2.4 \dots 2n} (-3)^n\right) = \sqrt{3} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3 \dots (2n-3)}{2.4 \dots 2n}\right).$$

Le critère de Duhamel montre que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3 \dots (2n-3)}{2.4 \dots 2n}$ est convergente.

Pour $x = 6$, c'est la même série mais alternée, donc convergente, car absolument convergente.

En conclusion, la série trouvée a pour domaine de convergence : $\Delta = [0, 6]$.

Remarque 2.4.4

Le cas $x = 0$ donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3 \dots (2n-3)}{2.4 \dots 2n} = 1.$$

Le cas $x = 6$ donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1.3 \dots (2n-3)}{2.4 \dots 2n} = \sqrt{2} - 1.$$

2.4.2 Sommation de quelques séries entières

ON peut dans certains cas reconnaître, dans une série entière, le développement d'une fonction connue ; trouver cette fonction, c'est faire la sommation de la série entière. Ce problème est l'inverse de celui qui a été étudié précédemment.

1^{er} exemple

Soit la série entière $\left(\sum a_n x^n\right)$, le terme a_n est de la forme : $a_n = \frac{P(n)}{n!}$ où $P(n)$ étant un polynôme en n de degré m .

on met $P(n)$ sous la forme :

$$P(n) = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n(n-1) + \alpha_3 n(n-1)(n-2) + \dots = \alpha_0 + \sum_{k=1}^m \alpha_k n(n-1) \dots (n-k+1).$$

On a : $P(k) = \alpha_0 + \alpha_1 k + \alpha_2 k(k-1) + \alpha_3 k(k-1)(k-2) + \dots + \alpha_k k!$, cette relation de récurrence

permet de calculer toutes les valeurs de α_k . On calcule α_0 , puis α_1 , puis α_2 jusqu'à α_m .
exemple : Sommer la série suivante.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-4n^4 + 25n^3 - 49n^2 + 31n + 2) \frac{x^n}{n!}$$

son rayon de convergence étant l'infini, posons : $P(n) = -4n^4 + 25n^3 - 49n^2 + 31n + 2$
 $= \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n(n-1) + \alpha_3 n(n-1)(n-2) + \alpha_4 n(n-1)(n-2)(n-3)$.

Pour $n = 0$ on a $P(0) = \alpha_0 = 2$

Pour $n = 1$ on a $P(1) = \alpha_0 + \alpha_1 = 5 = 2 + \alpha_1 \iff \alpha_1 = 3$

Pour $n = 2$ on a $P(2) = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 4 \iff \alpha_2 = -2$

Pour $n = 3$ on a $P(3) = \alpha_0 + 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 6\alpha_3 = 5 \iff \alpha_3 = 1$

Pour $n = 4$ on a $P(4) = \alpha_0 + 4\alpha_1 + 12\alpha_2 + 24\alpha_3 + 24\alpha_4 = -82 \iff \alpha_4 = -4$

$-4n^4 + 25n^3 - 49n^2 + 31n + 2 = 2 + 3n - 2n(n-1) + n(n-1)(n-2) - 4n(n-1)(n-2)(n-3)$.

La somme est alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{n!} + \frac{3n}{n!} - \frac{2n(n-1)}{n!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} - \frac{4n(n-1)(n-2)(n-3)}{n!} \right) x^n \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n-3)!} - 4 \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{(n-4)!} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + 3x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - 2x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + x^3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} - 4x^4 \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^{n-4}}{(n-4)!} \\ &= (2 + 3x - 2x^2 + x^3 - 4x^4) e^x. \end{aligned}$$

On a par exemple : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4n^4 + 25n^3 - 49n^2 + 31n + 2}{n!} = f(1) = 0$.

2^{ème} exemple

Soit la série entière $\left(\sum a_n x^n \right)$, le terme a_n est de la forme : $a_n = P(n)$ où $P(n)$ étant un polynôme en n de degré m .

on met $P(n)$ sous la forme :

$P(n) = \alpha_0 + \alpha_1(n+1) + \alpha_2(n+1)(n+2) + \alpha_3(n+1)(n+2)(n+3) + \dots$

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^m \alpha_k (n+1)(n+2) \cdots (n+k).$$

On a : $P(k) = \alpha_0 + \alpha_1(k+1) + \alpha_2(k+1)(k+2) + \alpha_3(k+1)(k+2)(k+3) + \dots + \alpha_k \frac{(k+m)!}{k!}$,
cette relation de récurrence permet de calculer toutes les valeurs de α_k . On calcule α_0 ,
puis α_1 , puis α_2 jusqu'à α_m .

exemple : Sommer la série suivante.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^3 + 9n^2 + 20n + 11) x^n$$

son rayon de convergence étant égal à 1. Posons :

$P(n) = n^3 + 9n^2 + 20n + 11 = \alpha_0 + \alpha_1(n+1) + \alpha_2(n+1)(n+2) + \alpha_3(n+1)(n+2)(n+3)$.

Pour $n = -1$ on a $P(-1) = \alpha_0 = -1$.

Pour $n = -2$ on a $P(-2) = \alpha_0 - \alpha_1 = -1 = -1 - \alpha_1 \iff \alpha_1 = 0$.

Pour $n = -3$ on a $P(-3) = \alpha_0 - 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 5 \iff \alpha_2 = 3$.

Pour $n = -4$ on a $P(-4) = \alpha_0 - 3\alpha_1 + 6\alpha_2 - 6\alpha_3 = 11 \iff \alpha_3 = 1$.

D'où : $P(n) = -1 + 3(n+1) + (n+1)(n+2)(n+3)$,

et donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1 + 3(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3))x^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3)x^n. \end{aligned}$$

Les trois sommes se déduisent de la série géométrique.

- $-\sum_{n=0}^{\infty} x^n = -\frac{1}{1-x}$
- $3\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n = 3\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}\right)'' = 3\left(\frac{1}{1-x} - 1 - x\right)''$
 $= 3\left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1\right)' = \frac{6}{(1-x)^3}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3}\right)''' = \left(1 + x + x^2 + \frac{1}{1-x}\right)'''$
 $= \left(1 + 2x + \frac{1}{(1-x)^2}\right)'' = \left(2 + \frac{-2}{(1-x)^3}\right)' = \frac{6}{(1-x)^4}$

On a :

$$f(x) = -\frac{1}{1-x} + \frac{6}{(1-x)^3} + \frac{6}{(1-x)^4} = \frac{x^3 - 3x^2 - 3x + 11}{(1-x)^4}$$

pour x réel la série ne converge pas aux bornes de l'intervalle de convergence. Le domaine de convergence est alors $] -1, 1[$.

3^{ème} exemple

Soit la série entière $(\sum a_n x^n)$, le terme a_n est de la forme : $a_n = \frac{1}{P(n)}$ où $P(n)$ étant un polynôme en n de degré m avec des racines simples et entières.

On décompose a_n éléments simples et on utilisera la formule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\text{Log}(1-x)$.

Exemple : Sommer la série suivante.

$$f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)(n+1)(n+3)}$$

son rayon de convergence est égal à 1.

La décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{1}{(n-2)(n+1)(n+3)} = \frac{1}{15(n-2)} - \frac{1}{6(n+1)} + \frac{1}{10(n+3)}.$$

- $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2} = x^2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x^2 (-\text{Log}(1-x)) = -x^2 \text{Log}(1-x).$
- $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x} \left(-\text{Log}(1-x) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right).$

$$\bullet \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} = \frac{1}{x^3} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n+3} = \frac{1}{x^3} \sum_{n=6}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x^3} \left(-\text{Log}(1-x) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right).$$

On obtient finalement,

$$f(x) = \frac{1}{1800x^3} \left[(-120x^5 + 300x^2 - 180) \text{Log}(1-x) + 64x^5 + 105x^4 + 240x^3 - 90x^2 - 180x \right].$$

Remarques :

1. La limite de $f(x)$ quand x tend vers 1 est bien finie, car
 $(-120x^5 + 300x^2 - 180) \text{Log}(1-x) = -60(2x^3 + 4x^2 + 6x + 3)(1-x)^2 \text{Log}(1-x)$ et
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 139/1800$.

2. Un développement limité au voisinage de 0 de $(-120x^5 + 300x^2 - 180) \text{Log}(1-x) + 64x^5 + 105x^4 + 240x^3 - 90x^2 - 180x$ montre Aussi que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est bien finie et vaut $f(0) = 0$

3. Puisque la série donnée est convergente pour $x = -1$, le domaine de convergence de la série est donc $[-1, 1]$.

4. On déduit de ces calculs et ces remarques que :

$$f(1) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)(n+1)(n+3)} = \frac{139}{1800}$$

$$f(-1) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-2)(n+1)(n+3)} = \frac{109 - 240 \text{Log } 2}{1800}$$

En utilisant toujours la formule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\text{Log}(1-x)$, on peut sommer des séries de

type $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{x^n}{an+b}$ avec $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{Z}^*$ et $\frac{b}{a} \notin \mathbb{Z}^*$.

4^{ème} exemple

Sommer la série suivante,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$$

son rayon de convergence est égal à 1. On a $f(0) = 1$.

• 1^{er} cas $x > 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1}.$$

Posons $0 < \sqrt{x} = t \in]0, 1[$ on a alors : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ par dérivation puis intégration on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+t}{1-t} \text{ et donc :}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{Log} \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$$

• 2^{ème} cas $x < 0$:

$$\text{Posons } x = -X \text{ on a } f(-X) = g(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n X^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{X}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{X})^{2n+1}}{2n+1} \cdot$$

Posons $\sqrt{X} = t \in]0, 1[$ on a alors : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{X})^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}$ par dérivation puis intégration on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{Arctg} t \text{ et en conclusion finale on a donc :}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{Log} \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 1[\\ \frac{\operatorname{Arctg} \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} & \text{si } x \in]-1, 0[\end{cases}$$

Remarque : Les fonctions trouvées sont continues en 0 et valent 1. Pour le domaine de convergence de la série étudiée est $D_f = [-1, 1[$ et on trouve pour $x = -1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

5^{ème} exemple

De la même manière on peut sommer des séries de type :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

son rayon de convergence est égal à l'infini. On a $f(0) = 1$.

$$\bullet x > 0 \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} \sqrt{x}.$$

$$\bullet x < 0 \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cos \sqrt{-x}.$$

Beaucoup de séries ne peuvent être sommé à l'aide de fonctions élémentaires, et ceci malgré leur simple écriture.

6^{ème} exemple **La fonction de Lax :**

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

La série étant normalement convergente pour tout $x \in [-1, 1]$. Facilement on trouve :

$$\sigma'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{-\text{Log}(1-x)}{x},$$

fonction dont la primitive n'est pas « une fonction élémentaire. »

Il existe une relation fonctionnelle intéressante pour $\sigma(x)$. On a :

$$\sigma(x) = - \int_0^x \frac{\text{Log}(1-t)}{t} dt$$

C'est une intégrale impropre en 0 et en 1. La limite en 0 de $\frac{-\text{Log}(1-x)}{x}$ vaut 1, au voisinage de 1, on a : $\frac{\text{Log}(1-t)}{t} \sim \text{Log}(1-t)$ dont l'intégrale existe. une simple intégration par partie donne :

$$\sigma(x) = - [\text{Log}(1-t) \text{Log} t]_0^x + \int_0^x \frac{\text{Log} t}{1-t} dt$$

on a $\lim_{t \rightarrow 0} (\text{Log}(1-t) \text{Log} t) = 0$, un changement de variables $X = 1-t$ dans la dernière intégrale donne :

$$\int_0^x \frac{\text{Log} t}{1-t} dt = \int_1^{1-x} \frac{-\text{Log}(1-X)}{X} dX = - \int_1^0 \frac{\text{Log}(1-X)}{X} dX - \int_0^{1-x} \frac{\text{Log}(1-X)}{X} dX$$

On verra au chapitre sur les séries de Fourier que

$$- \int_1^0 \frac{\text{Log}(1-X)}{X} dX = \int_0^1 \frac{\text{Log}(1-X)}{X} dX = \sigma(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En conclusion on a :

$$\forall x \in]0, 1[\quad \sigma(x) + \sigma(1-x) + \text{Log} x \text{Log}(1-x) = \frac{\pi^2}{6} \quad (\star)$$

Remarques :

- La formule (\star) reste valable pour $x \in [0, 1]$, car $\lim_{x \rightarrow 0} \text{Log} x \text{Log}(1-x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x \text{Log} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \text{Log} x \text{Log}(1-x) = \lim_{t \rightarrow 0} \text{Log}(1-t) \text{Log} t = \lim_{t \rightarrow 0} -t \text{Log} t = 0$
- $x \in [0; 1/2] \iff 1-x \in [1/2; 1]$, connaissant les images de tous les nombres de l'intervalle $[0, 1/2]$ on peut déduire celles des nombres de l'intervalle $[1/2, 1]$; et généralement si a et b sont deux nombres réels de $[0; 1]$ tels que $a + b = 1$ alors on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \text{Log} a \text{Log}(1-a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2}$$

- En posant $x = 1/2$ on obtient $2\sigma(1/2) + \text{Log}^2(1/2) = \pi^2/6$ d'où

$$\sigma(1/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \text{Log}^2 2 \sim 0.58224$$

6^{ème} exemple

Donner le rayon de convergence de la série suivante puis calculer sa somme :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n} x^n$$

On a immédiatement

$$1/R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n^{(-1)^n}|} = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{|2n|} = 1 & \text{si } n \text{ est paire} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{|1/2n+1|} = 1 & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

D'où $R = 1$.

On peut écrire cette somme sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 4x^4 + \frac{1}{5}x^5 + 6x^6 + \frac{1}{7}x^7 + 8x^8 + \dots \\ &= (2x^2 + 4x^4 + 6x^6 + 8x^8 + \dots) + \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \dots\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

La première série est divergente pour $x = \pm 1$, donc le domaine de convergence de la série donnée est $] -1, 1[$, (La 2^{ème} série est aussi convergente pour $x = \pm 1$).

On peut écrire :

$$f(x) = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \right)' + \text{Arctg } x = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n \right)' + \text{Arctg } x.$$

pour obtenir finalement

$$f(x) = x \left(\frac{1}{1-x^2} \right)' + \text{Arctg } x = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \text{Arctg } x \quad \forall x \in] -1, 1[.$$

Comme application on a pour $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(-1)^n}}{\sqrt{3^n}} = \frac{\pi + 9}{6} \sim 2,0236.$$

Exercice 1 Résoudre l'équation différentielle suivante ; en utilisant les séries entières :

$$\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Solution :

Posons $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$.

On a : $y'' = 2.1.a_2 + 3.2.a_3x + 4.3.a_4x^2 + 5.4.a_5x^3 + \dots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \dots$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$.

En substituant dans notre équation différentielle, on trouve :

$$2.1.a_2 + (3.2a_3 - a_0)x + (4.3.a_4 - a_1)x^2 + (5.4.a_5 - a_2)x^3 + \dots + ((n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1})x^n + \dots = 0.$$

On obtient les équations algébriques suivantes :

$$\begin{cases} 2.1.a_2 = 0 \\ 3.2a_3 - a_0 = 0 \\ 4.3.a_4 - a_1 = 0 \\ 5.4.a_5 - a_2 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

On constate que $y(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$ et $y'(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$, comme la première équation algébrique donne aussi $a_2 = 0$, on a alors

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{2.3} = \frac{1}{3!} \quad a_4 = a_5 = 0, \quad a_6 = \frac{1}{2.3.5.6} = \frac{1}{6!}, \quad a_7 = a_8 = 0,$$

$a_9 = \frac{1}{2.3.5.6.8.9} = \frac{1}{9!}$. On remarque que seulement les coefficients a_{3n} , $n \in \mathbb{N}$ sont non nuls. On obtient finalement :

$$a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0 \quad \text{et} \quad a_{3n} = \frac{1.4.7 \dots (3n-2)}{(3n)!}.$$

La solution ainsi construite sera :

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.4.7 \dots (3n-2)}{(3n)!} x^{3n}.$$

Son domaine de convergence est donné par la règle de d'Alembert, on trouve que $R = \infty$. La série est convergente pour tout x dans \mathbb{R} .

Remarque 2.4.5 α : Le même problème avec d'autres conditions, par exemple :

$$\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

On a une autre solution, et on trouve $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ et :

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.5.8 \dots (3n-1)}{(3n+1)!} x^{3n+1}.$$

β : L'équation $y'' - xy = 0$ a pour solution générale $y(x) = a.y_1(x) + b.y_2(x)$, où a et b sont deux réels quelconques.

y_1 et y_2 sont deux fonctions spéciales, qu'on ne peut pas exprimer à l'aide de fonctions élémentaires.