P11g/1ccc

Travail et energie

التمرين الأول:

جسم كتلته $10\,Kg$ يسقط من إرتفاع $3m$ على كومة من الرمل. إذا انغرس الجسم في الرمل على عمق $3cm$ قبل التوقف. ما هي القوة الثابتة التي أثر بها الرمل على الجسم؟

التمرين الثاني:

جسم P كتلته m ينزلق دون احتكاك على سطح نصف كروي (O،R). ينطلق الجسم من القمة s و دون سرعة ابتدائية (الشكل 1).

1- عند أي إرتفاع h يغادر الجسم السطح الكروي.

2- أحسب العمل المبذول على السطح الكروي المناسب لـ h.

التمرين الثالث:

لدينا نواس بسيط كتلته m و طوله L. θ_0 هي السعة العظمى للإهتزازات و التي تقع بدون احتكاك (الشكل 2).

1- باستعمال الطاقة الكامنة و الطاقة الحركية، أوجد معادلة حركة النواس.

2- أوجد دور الإهتزازات T.

3- في حالة الإهتزازات الصغيرة، كيف تصبح معادلة حركة النواس و دور إهتزازاته T_0.

$F = -\frac{a}{r^3}$

$F = -\text{grad}\, u$

التمرين الرابع:

تتحرك نقطة مادية M كتلتها m في مستوي تحت تأثير القوى $\vec{F} = \frac{-a}{r^3}\vec{U}_\rho$ ، حيث $\vec{U}_\rho$ هو شعاع الوحدة في الإحداثيات القطبية.

$E_p = -\int \vec{F}\, d\vec{r}$

1- ما هي القدرة الكامنة التي تنتج عنها $\vec{F}$.

2- أكتب عبارة السرعة في الإحداثيات القطبية ثم عبارة القدرة الحركية.

3- إستنتج القدرة الميكانيكية E_M.

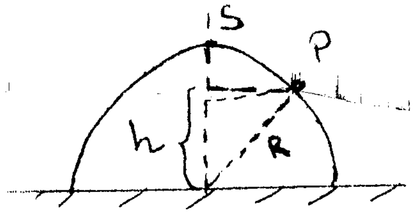
- أحسب العزم الحركي في الإحداثيات القطبية ثم أحسب àäà. ماذا تستنتج؟

التمرين الخامس:

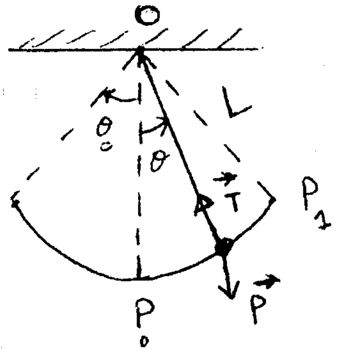
جسم كتلته m يتحرك على مسار ABCDE (الشكل 3). الجزء AB أملس دائري، الجزء BC أفقي معامل إحتكاكه μ و الجزء CD أفقي كذلك و أملس. تنطلق m من A دون سرعة إبتدائية فتلتقي بنابض أفقي CDE مثبت في E و ثابت مرونته K. اذا كان إرتفاع A عن الأفق BE يساوي h و الطول BC يساوي a، أوجد عبارة الانضغاط الأعظمي CD=d للنابض.

$W = \int \vec{F}\, d\vec{l}$

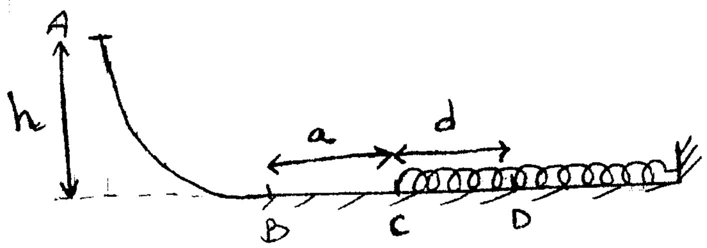
8 | A-w



الشكل -1-



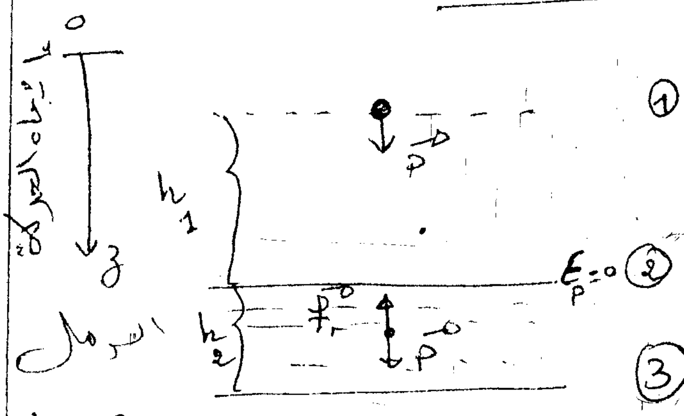
الشكل -2-



الشكل -3-

9 | A-w

تمرين الأول



$h_1 = 3m$

$h_2 = 3cm$

$\vec{P}$: ثقل الجسم

$\vec{f_r}$: قوة مقاومة الرمل

1 ← 2 : الجسم تحت تأثير ثقله فقط + الثقل قوة محافظة

إذن $\Delta E_M = 0$ (أو $W = \Delta E_c$)

$\Rightarrow \cancel{(E_c + E_{p_2})}$

$\Rightarrow (E_{c_2} + E_{p_2}) - (E_{c_1} + E_{p_1}) = 0$

لدينا :

$\begin{cases} E_{c_1} = 0 \\ E_{p_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow E_{c_2} - E_{p_1} = 0$

$\Rightarrow \boxed{E_{c_2} = E_{p_1} = mgh_1}$

2 ← 3 الجسم تحت تأثير ثقله (قوة محافظة) و قوة مقاومة الرمل (قوة غير محافظة)، إذن

$\Delta E_M = W_{f_r}$ (أو $W(\vec{P} + \vec{f_r}) = \Delta E_c$)

$\Rightarrow (E_{c_3} + E_{p_3}) - (E_{c_2} + E_{p_2}) = \int \vec{f_r} \cdot d\vec{z}$

لدينا

$\begin{cases} E_{c_3} = 0 \text{ (توقف)} \\ E_{p_2} = 0 \end{cases}$

$E_{p_3} - E_{c_2} = - f_r \cdot h_2$

$-mgh_2 - mgh_1 = - f_r \, h_2$

$\Rightarrow mg(h_1 + h_2) = f_r \cdot h_2$

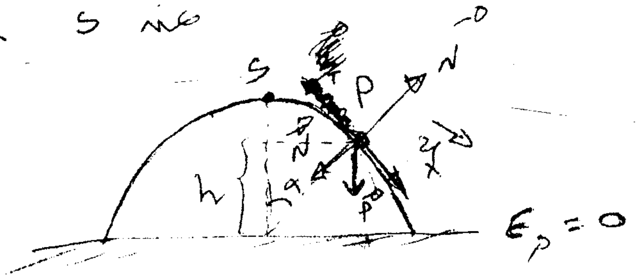
$\Rightarrow \boxed{f_r = \dfrac{mg(h_1 + h_2)}{h_2}}$

$\Rightarrow f_r = \dfrac{10 \times 10\,(3 + 3 \times 10^{-2})}{3 \times 10^{-2}}$

$\Rightarrow \boxed{f_r = 101N} \Rightarrow \boxed{f_r = 1{,}01 \times 10^{4} N}$

التمرين الثاني :

(يمكن إختيار $E_p = 0$ عند S)



حساب الارتفاع h الذي يغادر منه الجسم السطح الكروي

عند النقطة S :

$\begin{cases} E_p(S) = mgR \\ E_c(S) = 0 \end{cases}$ (الجسم ينطلق من سكون $V = 0$)

عند النقطة P :

$\begin{cases} E_p(P) = mgh \\ E_c(P) = \frac{1}{2} m V_P^2 \end{cases}$

$V_P = ?$

إيجاد v_P

بتطبيق م.أ.ن : $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$

$\vec{u}_N$ / $mg\cos\alpha - N = m\gamma_N = m\frac{v^2}{R}$

عند مغادرة الجسم للسطح الكروي ⟸ $N=0$

$mg\cos\alpha = m\frac{v_P^2}{R}$

$\cos\alpha = \frac{h}{R}$

$\Rightarrow mg\cdot\frac{h}{R} = \frac{m v_P^2}{R}$

$\Rightarrow v_P^2 = hg \Rightarrow E_C(P) = \frac{1}{2} m h g$

$\Rightarrow E_M(P) = mgh + \frac{1}{2} mgh$

$\Rightarrow E_M(P) = \frac{3}{2} mgh$

عمل القوى = عمل الثقل $(\vec{N} \perp d\vec{\ell})$

$E_M(S) = E_M(P)$

$\Rightarrow mgR = \frac{3}{2} mgh \Rightarrow h = \frac{2}{3} R$

2) حساب العمل المبذول

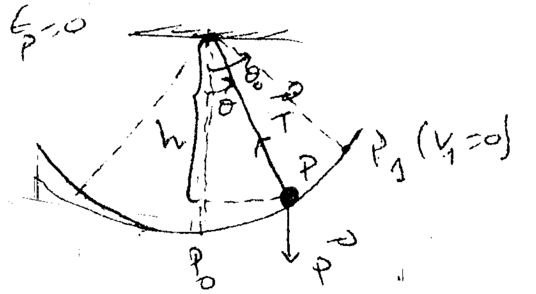
$W_{S\to P} = \Delta E_C = E_C(P) - E_C(S)$

$W_{S\to P} = \frac{1}{2} mgh - 0$

$W_{S\to P} = \frac{1}{2} mgh$

التمرين الثالث

1 - إيجاد معادلة النواس



$E_p(P) = -mgh = -mg\ell\cos\theta$

$E_c(P) = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(\ell\dot{\theta})^2$

$\Rightarrow E_M(P) = \frac{1}{2} m(\ell\dot{\theta})^2 - mg\ell\cos\theta$

$E_p(P_1) = -mg\ell\cos\theta_0$, $E_c(P_1) = 0$

$\Rightarrow E_M(P_1) = -mg\ell\cos\theta_0$

الطاقة الكلية محفوظة ⟸

$\Delta E_M = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m(\ell^2\dot{\theta}^2) - mg\ell\cos\theta = -mg\ell\cos\theta_0$

بالاشتقاق

$2\left(\frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta}\right) - mg\ell(-\dot{\theta}\sin\theta) = 0$

$\Rightarrow \ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$

إيجاد دور الحركة :

لدينا

$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

$\frac{1}{2} \cancel{m}\ell^2\dot{\theta}^2 - \cancel{m}g\ell\cos\theta = -\cancel{m}g\ell\cos\theta_0$

$\frac{1}{2} \ell\dot{\theta}^2 - (g\cos\theta - \cos\theta_0) = 0$

$\Rightarrow \ell\dot{\theta}^2 = 2g(\cos\theta - \cos\theta_0)$

قوة مركزية متجهة $f \Leftarrow F // u_\rho$
نحو المركز و بالتالي فإن f قوة
مشتقة من كمون

$$\vec{F} = -\vec{grad}\, E_p$$

$$E_p = -\int \vec{F}\, d\vec{r}$$

$$\Rightarrow E_p = -\int \frac{-a}{r^3} \vec{u}_\rho (dr\, \vec{u}_\rho)$$

$$\Rightarrow E_p = a\int \frac{dr}{r^3} \Rightarrow \boxed{E_p = -\frac{a}{2}\frac{1}{r^2} + K}$$

* إيجاد K
حسب مصطلح كمون كولون $E(\infty) = 0$

$$\Rightarrow E(\infty) = -\frac{a}{2}\left(\frac{1}{\infty^2}\right) + K = 0 \Rightarrow K = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E_p(r) = -\frac{a}{2r^2}}$$

2) عبارة السرعة في الإحداثيات القطبية

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}, \quad \vec{OM} = r\,\vec{u}_\rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_\rho + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right]}$$

إستنتاج الطاقة الميكانيكية

$$\boxed{E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] - \frac{a}{2r^2}}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow dt = \frac{d\theta}{\dot{\theta}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\Rightarrow dt = \frac{\sqrt{\ell}\, d\theta}{\sqrt{2g(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int \frac{d\theta}{(\cos\theta - \cos\theta_0)^{1/2}}}$$

من أجل الإهتزازات الصغيرة
$\sin\theta = \theta$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ \dot{\theta} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \end{cases}$$

التمرين الرابع :

1) القوة الكامنة الناتجة عن F

$$\vec{F} = -\frac{a}{r^3}\vec{u}_\rho$$

12 - Aw

حساب العزم الحركي في المعلم القطبي

$$\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = (r\vec{u}_\rho) \wedge m(\dot{r}\vec{u}_\rho + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\vec{k}}$$

حساب $\frac{d\vec{L}}{dt}$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = m\left[2r\dot{r}\dot{\theta}\vec{k} + r^2\ddot{\theta}\right]\vec{k}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = mr\left[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right]\vec{k}}$$

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

$$\vec{f} = m\vec{\gamma}$$

$$\Rightarrow -\frac{a\vec{u}_\rho}{r^3} (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

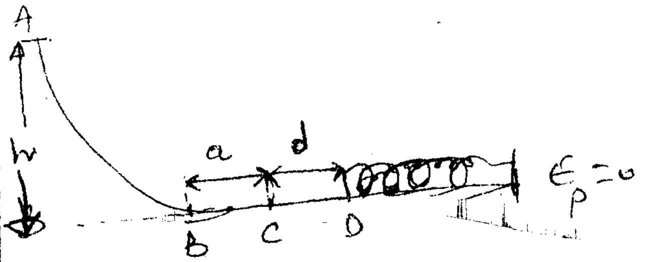
$$\Rightarrow \boxed{2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}}$$

$\Rightarrow \|\vec{L}\| =$ ثابت

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{L}\| = mr^2\dot{\theta} = c^{te}}$$

حيث أن $\|\vec{L}\| = c$ ويدل على ثبات المساحات

التمرين الخامس:



حساب السرعة عند B

$$E_M(A) = E_M(B)$$

$$\Rightarrow E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$

$$\Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$$

نحسب السرعة عند C:

$$\Delta E_M = \Delta E_c = W(\vec{f}_r)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -\mu mga$$

$$\Rightarrow \boxed{v_C = \sqrt{2g(h-\mu a)}}$$

حساب التقلص الأعظمي

$$E_M(C) = E_M(D) \quad \left(E_{c_D} = 0,\ E_{p_D} = \frac{1}{2}kd^2\right)$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kd^2$$

$$\Rightarrow \boxed{d = \frac{2mg}{k}(h-\mu a)}$$