

Corrigé des exercices du cours n° 4

Exercice 1.

L'ouverture lente implique une détente isotherme¹ $\Rightarrow PV = C^{\text{te}} = P_1 \cdot V_1 = 2 \cdot 10^5 \times 0,5 \cdot 10^{-3} \approx 100 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3$

Le CO_2 va se détendre à $P_2 \approx 1 \text{ bar}$ (pression approximative de l'eau à 1 cm de la surface de l'air ambiant de 1 bar). Le volume total de gaz détendu vaut donc $V_2 = P_1 \cdot V_1 / P_2 \approx 100 / 1 \cdot 10^5 \approx 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 1 \text{ L}$.

Cependant le gaz sort de la bouteille tant que la pression de la bouteille est supérieure à la pression de sortie P_2 du CO_2 , il va donc rester 0,5 L de CO_2 à 1 bar dans la bouteille à la fin de la détente $\Rightarrow$ on peut utiliser au maximum $V = V_2 - V_{\text{bouteille}} = 1 - 0,5 = 0,5 \text{ L}$ de CO_2 .

Noter que, si le détendeur est un simple robinet et que la sortie de CO_2 a lieu à l'air libre (pression quasiment nulle de CO_2), le CO_2 aura pour volume la totalité de la pièce dans laquelle il est détendu. Si le détendeur ne s'ouvre que si la pression intérieure est supérieure à la pression atmosphérique de 1 bar (détendeur de type différentiel) alors on ne pourra récupérer que 0,5 L.

Exercice 2.

1.

$$T_1 \cdot P_1^{(1-\gamma)/\gamma} = T_2 \cdot P_2^{(1-\gamma)/\gamma} \Rightarrow T_2 = T_1 \times (P_2/P_1)^{(1-\gamma)/\gamma} \approx 293 \times (10 \cdot 10^5 / 1 \cdot 10^5)^{0,4/1,4} \approx 566 \text{ K} \approx 293 \text{ °C}$$

Si on place un bout de ficelle dans ce récipient, il peut s'enflammer ! Si le gaz est un mélange air - essence il s'enflamme et provoque alors un dégagement important de chaleur suivi d'une expansion (moteurs thermiques).

2.

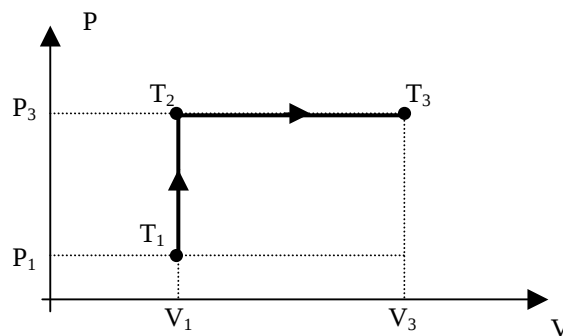
$$P_1 \cdot V_1 = nR \cdot T_1 \text{ et } P_2 \cdot V_2 = nR \cdot T_2 \Leftrightarrow P_1 \cdot V_1 / T_1 = P_2 \cdot V_2 / T_2 \Leftrightarrow V_2 = (P_1 \cdot V_1 \cdot T_2) / (P_2 \cdot T_1) \approx 0,2 \text{ litres}$$

$$\Delta U = m \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1) \text{ or } P_1 \cdot V_1 = nR \cdot T_1 \Rightarrow m = (P_1 \cdot V_1) / (R \cdot T_1) \approx 1 \cdot 10^5 \times 1 \cdot 10^{-3} / (287 \times 293) \approx 1,2 \text{ g}$$

$$\text{d'où } \Delta U = [(P_1 \cdot V_1) / (R \cdot T_1)] \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1) \approx 1,2 \cdot 10^{-3} \times 720 \times (566 - 293) \approx 236 \text{ J.}$$

Exercice 3.

1.



$$\begin{aligned} T_1 &\triangleq t_0 + 273,15 \approx 273 \text{ K} \\ T_3 &\approx 600 + 273,15 \approx 873 \text{ K} \\ P_1 &\approx 101300 \text{ Pa} \\ P_3 &= 3 \cdot P_0 \approx 303900 \text{ Pa} \\ V_1 &\approx 20 \text{ L} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} P_1 \cdot V_1 = nR \cdot T_1 \\ P_3 \cdot V_1 = nR \cdot T_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} nR = \frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} \\ T_2 = \frac{P_3 \cdot V_1}{nR} \end{cases} \Rightarrow T_2 = \frac{P_3 \cdot V_1 \cdot T_1}{P_1 \cdot V_1} = \frac{3 \cdot P_1 \cdot T_1}{P_1} \Rightarrow T_2 = 3 \cdot T_1 \approx 3 \times 273 \approx 819 \text{ K} (546 \text{ °C})$$

2.

¹ Une ouverture rapide impliquerait une chute de pression dans la bouteille, et donc un refroidissement du gaz restant dans la bouteille (volume de gaz $\approx$ volume de la bouteille = C^{te} et $PV = nR \cdot T$, la masse chutant moins vite que la pression c'est la température du gaz dans la bouteille qui chute) c'est la raison pour laquelle on voit apparaître des gouttes d'eau sur l'extérieur de la bouteille (liquéfaction de la vapeur d'eau de l'air ambiant sur les parois froides de la bouteille)...c'est *grosso modo* le principe de fonctionnement des réfrigérateurs.

$$n = \frac{P_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} \text{ or } \begin{cases} 1 \text{ mole} \rightarrow M \text{ kg} \\ n \text{ moles} \rightarrow m \text{ kg} \end{cases}, \text{ le produit en croix donne } m = n \cdot M = \frac{P_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} \times M \approx \frac{101300 \times 20 \cdot 10^{-3}}{8,3 \times 273} \times 29 \cdot 10^{-3} \approx \mathbf{26 \text{ g}}$$

$$\Delta U_{12} = m \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1) \approx 26 \cdot 10^{-3} \times 708 \times (2 \cdot T_1) \approx 26 \cdot 10^{-3} \times 708 \times (2 \times 273) \approx \mathbf{10,0 \text{ kJ}}$$

3.

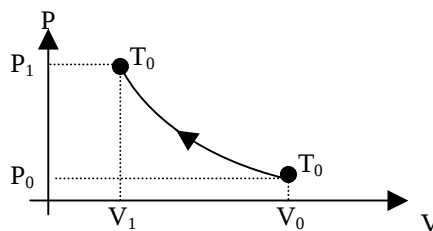
$$P_3 \cdot V_3 = n \cdot R \cdot T_3 = \frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} \times T_3 \Leftrightarrow V_3 = \frac{P_1 \cdot V_1 \times T_3}{T_1 \times (3 \cdot P_1)} = \frac{V_1 \cdot T_3}{3 \cdot T_1} \approx \frac{20 \cdot 10^{-3} \times 873}{3 \times 273} \approx \mathbf{21,3 \text{ L}}$$

4.

$$\Delta U_{23} = m \cdot c_V \cdot (T_3 - T_2) \approx 26 \cdot 10^{-3} \times 708 \times (873 - 819) \approx \mathbf{985 \text{ J}}$$
 (en prenant les valeurs numériques exactes et non les arrondis).

Exercice 4.

1.



$$\begin{cases} P_0 \cdot V_0 = nR \cdot T_0 \\ P_1 \cdot V_1 = nR \cdot T_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{P_1 \cdot V_1}{T_0} = \frac{P_0 \cdot V_0}{T_0} \Rightarrow P_1 \cdot V_1 = P_0 \cdot V_0 \Rightarrow V_1 = \frac{P_0 \cdot V_0}{P_1} \approx \frac{101325 \times 1}{20 \times 101325} \approx \mathbf{50 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} \text{ (soit 50 L)}$$

Ce calcul permet aux élèves de se familiariser avec les unités courantes de pression

Pour mémoire :

1 kgf/cm² = 1 at (atmosphère technique) ≈ 98 066 Pa = 0,98066 bar (1 kgf = "1 kilogramme-force" = g Newton avec g ≈ 9,8066 ms⁻²)

1 atm (atmosphère physique) = 101 325 Pa = 1,013 25 bar

1 torr = 1atm/760 ≈ 133,32 Pa = 1,3332 mbar

1 mm Hg ≈ 133,32 Pa = 1,3332 mbar

Les "conditions normales de température et de pression" correspondent à T = 273,15 K (= 0° C) et P = 1 atm (= 1013,25 hPa ou mbar).

On a finalement, en gros, 1000 hPa = 1000 mbar ≈ 1 atm ≈ 1 kgf/cm², on dit encore une pression de "1 kilo" chez les mécanos !!! Notez cependant que des pneus d'automobile "gonflés à 2 bars" sont en fait gonflés à 3 bars : la pression atmosphérique faisant 1 bar, les caoutchoucs voient une pression de 3 - 1 = 2 bars : les caoutchoucs sont à 2 bars, pas l'air à l'intérieur des pneus !

2.

$W = - \int_{V_0}^{V_1} P \cdot dV$, il faut exprimer P en fonction de V puisque la variable d'intégration est V. On utilise alors la relation des

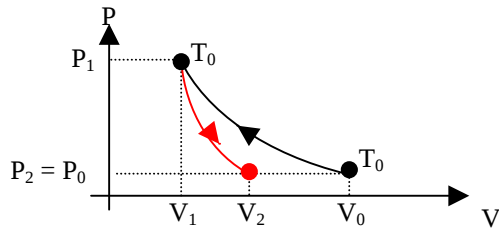
gaz parfaits : $P \cdot V = n \cdot R \cdot T_0$, d'où $P = n \cdot R \cdot T_0 \times \frac{1}{V}$ ainsi $W = - \int_{V_0}^{V_1} n \cdot R \cdot T_0 \times \frac{1}{V} dV$ et puisque $T_0 = C^{te}$ tout au long de la

transformation on a également $W = -n.R.T_0 \times \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V} dV = -P_0.V_0 \times \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V} dV$ ainsi $W = -P_0.V_0 \times [\ln V]_{V_0}^{V_1}$ d'où

$$W = P_0.V_0 \times \ln\left(\frac{V_0}{V_1}\right) \approx 101\,325 \times 1 \times \ln\left(\frac{1}{50.10^{-3}}\right) \approx \mathbf{304\,kJ}$$

$\Delta U = C_v.\Delta T = 0$ car la compression est isotherme ($\Delta T = 0$). Or le 1er principe de la thermo nous apprend que $W + Q = \Delta U$, on en déduit donc que $W + Q = 0$ et donc que $Q = -W \approx \mathbf{-304\,kJ}$ (chaleur évacuée par le système)

3.



$$P_2.V_2^\gamma = P_1.V_1^\gamma \Rightarrow V_2 = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \times V_1 \approx \left(\frac{20.10^5}{1.10^5}\right)^{\frac{1}{1.42}} \times 50.10^{-3} \approx \mathbf{412\,L}$$

$$P_2.V_2 = n.R.T_2 \text{ or } nR = \frac{P_0.V_0}{T_0} \text{ d'où } T_2 = \frac{P_2.V_2.T_0}{P_0.V_0} \approx \frac{1013,25.10^2 \times 412.10^{-3} \times 273}{1013,25.10^2 \times 1} \approx \mathbf{113\,K} \text{ (} \approx -161\,^{\circ}\text{C)}$$

4.

$W = -\int_{V_0}^{V_1} P.dV = -\int_{V_0}^{V_1} \frac{n.R.T}{V}.dV$ n'aboutit à rien car T dépend de V : on ne peut pas le sortir de l'intégrale.

On sait cependant que $P.V^\gamma = C^{te} = P_1.V_1^\gamma = P_2.V_2^\gamma$ d'où $W = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{C^{te}}{V^\gamma}.dV = -C^{te} \times \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^\gamma}.dV = -P_1.V_1^\gamma \times \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^\gamma}.dV =$

$$-P_1.V_1^\gamma \times \int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma}.dV = -P_1.V_1^\gamma \times \left[\left(\frac{1}{-\gamma+1} \right) . V^{-\gamma+1} \right]_{V_1}^{V_2} \Rightarrow W = P_1.V_1^\gamma \times \left(\frac{1}{1-\gamma} \right) . [V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}] \approx$$

$$(20 \times 101325) \times (50.10^{-3})^{1.42} \times \left(\frac{1}{1-1.42} \right) . [(50.10^{-3})^{1-1.42} - (412.10^{-3})^{1-1.42}] \approx \mathbf{-142\,kJ}$$

Le gaz travaille moins qu'avant : on s'en doutait car la surface située sous la courbe adiabatique est plus faible que la surface située sous l'isotherme.

Exercice 5.

On peut résumer nos connaissances sur les états :

état A $\left\{ \begin{array}{l} P_1 \approx 1 \text{ bar} \\ V_1 \approx 10 \text{ L} \\ T_1 \approx 273 \text{ K} \end{array} \right.$	état B $\left\{ \begin{array}{l} P_2 = 2.P_1 \approx 2 \text{ bar} \\ V_2 = V_1 \approx 10 \text{ L} \\ T_2 \approx ? \end{array} \right.$
état C $\left\{ \begin{array}{l} P_3 = P_2 = 2.P_1 \approx 2 \text{ bar} \\ V_3 = V_2 = 2.V_1 = 20 \text{ L} \\ T_3 \approx ? \end{array} \right.$	état D $\left\{ \begin{array}{l} P_4 = P_1 \approx 1 \text{ bar} \\ V_4 = V_2 = 2.V_1 \approx 20 \text{ L} \\ T_4 = T_2 = ? \end{array} \right.$

1.

$W = \text{surface hachurée} \Rightarrow W = \Delta P \times \Delta V \Leftrightarrow W = (V_1 - V_2) \times (P_2 - P_1) \Leftrightarrow \boxed{W = -P_1 \cdot V_1} \approx -1.10^5 \times 10.10^{-3} \approx -1,00 \text{ kJ}$ (le cycle est moteur car il y a rejet de travail)

2.

$$P_2 \cdot V_2 = nR \cdot T_2 \text{ or } nR = \frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} \text{ d'où } P_2 \cdot V_2 = \frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} \times T_2 \Leftrightarrow T_2 = \frac{P_2 \cdot V_2}{P_1 \cdot V_1} \times T_1 \Leftrightarrow T_2 = \frac{2 \cdot \cancel{P_1} \times \cancel{V_1}}{\cancel{P_1} \cdot \cancel{V_1}} \times T_1 \Leftrightarrow \boxed{T_2 = 2 \times T_1} \approx 2 \times 273 \approx 546,0 \text{ K}$$

$$\text{De même } P_3 \cdot V_3 = nR \cdot T_3 \text{ or } nR = \frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} \text{ d'où } P_3 \cdot V_3 = \frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} \times T_3 \Leftrightarrow T_3 = \frac{P_3 \cdot V_3}{P_1 \cdot V_1} \times T_1 \Leftrightarrow T_3 = \frac{2 \cdot \cancel{P_1} \times 2 \cdot \cancel{V_1}}{\cancel{P_1} \cdot \cancel{V_1}} \times T_1 \Leftrightarrow \boxed{T_3 = 4 \times T_1} \approx 4 \times 273 \approx 1092 \text{ K}$$

Comme B et D sont sur la même isotherme, on a $\boxed{T_4 = T_2} \approx 546,0 \text{ K}$

3.

$$m = n \times M \text{ or } nR = \frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} \text{ d'où } \boxed{m = \frac{P_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} \times M} \approx \frac{1.10^5 \times 10.10^{-3}}{8,31 \times 273} \times 29.10^{-3} \approx 12,8 \text{ g}$$

$$Q_{AB} \text{ est échangée sur une isochore, d'où } Q_{AB} = m \cdot C_V \cdot \Delta T \text{ et puisque } C_V = C_p / \gamma \text{ on en déduit } \boxed{Q_{AB} = m \cdot \frac{C_p}{\gamma} \times (T_2 - T_1)} \approx 12,8.10^{-3} \times \frac{992}{1,42} \times (546 - 273) \approx 2,44 \text{ kJ}$$

Remarque : faire bien attention à l'unité de C_p qui permet de savoir s'il s'agit :

1/ d'une capacité calorifique (unité = J/K)

2/ d'une chaleur massique (= capacité calorifique massique, unité = J/K.kg)

3/ d'une capacité calorifique molaire (unité = J/K.Mol)

$$\text{Nous avons } Q_{BC} \text{ échangée sur une isobare, donc } \boxed{Q_{BC} = m \cdot C_p \times (T_3 - T_2)} \approx 12,8.10^{-3} \times 992 \times (1092 - 546) \approx 6,92 \text{ kJ}$$

$$Q_{CD} \text{ échangée sur une isochore, donc en reprenant le même calcul que } Q_{AB} \text{ et en identifiant on obtient } \boxed{Q_{CD} = m \cdot \frac{C_p}{\gamma} \times (T_4 - T_3)} \approx 12,8.10^{-3} \times \frac{992}{1,42} \times (546 - 1092) \approx -4,88 \text{ kJ}$$

$$\text{Comme } Q_{DA} \text{ échangée sur une isobare, elle peut se calculer avec la relation } \boxed{Q_{DA} = m \cdot C_p \times (T_1 - T_4)} \approx 12,8.10^{-3} \times 992 \times (273 - 546) \approx -3,46 \text{ kJ}$$

on peut aussi prendre la relation $W + Q = 0$ sur un cycle, d'où $W + (Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}) = 0$ et donc $Q_{DA} = W - (Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD})$, on aboutit au même résultat. Cette dernière méthode est cependant plus dangereuse car elle repose sur 4 valeurs numériques trouvées aux questions précédentes...susceptibles d'être fausses : il faut se restreindre, dans la limite du possible, aux données de l'énoncé.